PROBLEMA A.1. Sea el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases} x-2y-3z &= 0 \\ 3x+10y-z &= 0 \\ x+14y+\alpha z &= 0 \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) La solución del sistema S cuando $\alpha = 0$. *(4 puntos).*

b) El valor de α para el que el sistema S tiene infinitas soluciones. *(4 puntos).*

c) Todas las soluciones del sistema S cuando se da a α el valor obtenido en el apartado b). *(2 puntos).*

Solución:

El sistema S es homogéneo, por lo tanto es un sistema compatible.

a) Para $\alpha = 0$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x-2y-3z &= 0 \\ 3x+10y-z &= 0 \\ x+14y &= 0 \end{cases}$$

Llamando A a la matriz de coeficientes de este sistema,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 0-126+2+30+14+0 = 46-126 = -80 \neq 0$$

Por lo que ran(A) = 3 = nº de incógnitas $\rightarrow$ sistema compatible determinado que por ser homogéneo tendrá como solución la trivial, es decir, $x = y = z = 0$

Para $\alpha = 0$ la solución del sistema S es $x = y = z = 0$

b) Como es un sistema homogéneo, tendrá infinitas soluciones cuando $|M| = 0$, siendo M la matriz de coeficientes del sistema S.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & \alpha \end{vmatrix} = 10\alpha-126+2+30+14+6\alpha = 46-126 = 16\alpha-80$$

$16\alpha - 80 = 0;\quad 16\alpha = 80;\quad \alpha = \dfrac{80}{16} = 5$

Como el menor de orden 2 de M $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 10+6 = 16 \neq 0 \rightarrow$ *para $\alpha = 5$,*

ran(M) = 2 < nº de incógnitas $\rightarrow$ S es un sistema compatible indeterminado y tendrá infinitas soluciones.

S tiene infinitas soluciones para $\alpha = 5$

c) Para $\alpha = 5$ resolvemos el sistema usando las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo de M (calculado en el apartado anterior). Usamos la primera y segunda ecuaciones y las incógnitas x e y:

$\begin{cases} x-2y = 3z \\ 3x+10y = z \end{cases}$ *, lo podemos resolver por Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3z & -2 \\ z & 10 \end{vmatrix}}{16} = \frac{30z + 2z}{16} = \frac{32z}{16} = 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{16} = \frac{z - 9z}{16} = \frac{-8z}{16} = \frac{-z}{2}$$

Finalmente, para $\alpha = 5$ *la solución será:* $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \dfrac{-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$