PROBLEMA A.2. En el espacio se tiene la recta $r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ y el plano π*: x + m z =* 0, donde *m* es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) El vector director de la recta *r*. *(2 puntos).*
b) El valor de m para el que la recta *r* y el plano *π* son perpendiculares. *(2 puntos).*
c) El valor de m para el que la recta *r* y el plano *π* son paralelos. *(3 puntos).*
d) La distancia entre *r* y *π* cuando se da a *m* el valor obtenido en el apartado c). *(3 puntos).*

Solución:

a) Obtengamos la ecuación paramétrica de la recta r.

Resolvemos el sistema que define a r.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0$, *podemos usar como incógnitas principales x e y. El sistema a resolver*

será $\begin{cases} x+y=1+z \\ x-y=z \end{cases}$ $\rightarrow$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ z & -1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-1-z-z}{-2}=\frac{1+2z}{2}=\frac{1}{2}+z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{-2}=\frac{z-1-z}{-2}=\frac{1}{2}$$

La ecuación paramétrica de la recta r es, $r:\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\lambda \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\lambda \end{cases}$ $\lambda\in\Re$, *y el vector director de r,* $\vec{v}_r$, *es:*

$\vec{v}_r = (1 , 0 , 1)$

b) $r\perp\pi$ *cuando* $\vec{v}_r \,//\, \vec{n}_\pi$, *siendo* $\vec{n}_\pi$ *el vector perpendicular al plano π.*

$\vec{v}_r = (1 , 0 , 1)$ *y* $\vec{n}_\pi = (1 , 0 , m)$

Para que estos vectores sean paralelos: $\frac{1}{1}=\frac{1}{m} \rightarrow m=1$

La recta r y el plano π son perpendiculares para m = 1

c) $r\,//\,\pi$ *cuando* $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$

Deberá cumplirse que (1 , 0 , 1) . (1 , 0 , m) = 0; 1 + m = 0; m = – 1

La recta r y el plano π son paralelos para m = – 1

d) Para m = – 1 hay que calcular d (r , π).

Para m = – 1, el plano π es x – z = 0. Utilizamos la ecuación paramétrica de r obtenida en el apartado a).

$$d\left(r\,,\,\pi\right)=d\left(P_r\,,\,\pi\right)=\left[siendo\quad P_r\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,0\right)\right]=\frac{\left|\frac{1}{2}-0\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,u.l.\approx 0'3536\ u.l.$$