PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B, donde B es una matriz de dos filas y dos columnas que no tiene ningún elemento nulo y que verifica la relación $B^2 = -7B + U$.

Obtener **razonadamente**:

a) Los números reales a y b tales que $A^2 = aA + bU$. *(4 puntos).*

b) Los números reales p y q tales que $B^{-1} = pB + qU$ *(2 puntos)*, **justificando** que la matriz B tiene inversa *(2 puntos).*

c) Obtener los valores de x e y para los que se verifica que $B^3 = xB + yU$ *(2 puntos).*

Solución:

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos a y b tales que $A^2 = aA + bU$, luego: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *efectuando operaciones,*

$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & -a \\ a & a+b \end{pmatrix}$ *que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:* $\begin{cases} a+b=0 \\ -a=-2 \\ a=2 \\ a+b=0 \end{cases}$, *en el que la 1ª y 4ª ecuación son iguales, así como la 2ª y 3ª, por lo que queda reducido a* $\begin{cases} a+b=0 \\ a=2 \end{cases}$, *sustituyendo el valor de a en la 1ª ecuación: $2 + b = 0$; $b = -2$.*

Los valores de a y b buscados son $\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$

b) Como $B^2 = -7B + U$ (en donde U es la matriz identidad de orden 2)

$B^2 + 7B = U$

$B(B + 7U) = U$, por lo tanto la matriz B tiene inversa que es $B + 7U$

Obtengamos p y q / $B^{-1} = pB + qU$

Sabemos que $B^{-1} = B + 7U$, por lo que $\boldsymbol{p = 1}$ ***y*** $\boldsymbol{q = 7}$

c) Como $B^2 = -7B + U$

$B^3 = B^2 . B = (-7B + U) . B = -7B^2 + B = -7(-7B + U) + B = 49B - 7U + B = 50B - 7U$

Como buscamos x e y / $B^3 = xB + yU$, será:

$50B - 7U = xB + yU$, por lo tanto $\boldsymbol{x = 50}$ ***e*** $\boldsymbol{y = -7}$