PROBLEMA B.2. En el espacio se dan los planos π , σ y τ de ecuaciones:

$$\pi:\ 2x - y + z = 3\ ;\qquad \sigma:\ x - y + z = 2\ ;\qquad \tau:\ 3x - y - az = b,$$

siendo a y b parámetros reales, y la recta r intersección de los planos π y σ.

Obtener **razonadamente**:

a) Un punto, el vector director y las ecuaciones de la recta r . *(3 puntos).*

b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto (2,1,3). *(4 puntos).*

c) Los valores de a y de b para que el plano τ contenga a la recta r, intersección de los planos π y σ. *(3 puntos).*

Solución:

a) La recta r es la intersección de los planos π y σ, por lo que la ecuación de la recta r será:

$$r:\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$, *resolvemos el sistema anterior usando x e y como incógnitas principales, el sistema a resolver será* $\begin{cases} 2x - y = 3 - z \\ x - y = 2 - z \end{cases}$. *Resolviéndolo por Cramer,*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 2-z & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3 + z + 2 - z}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4 - 2z - 3 + z}{-1} = \frac{1-z}{-1} = -1 + z$$

Por lo tanto, ***la ecuación paramétrica de r*** *será:* $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

A partir de esta ecuación conocemos: ***un punto de r*** $P_r(1, -1, 0)$

y ***su vector director*** $\vec{v_r}(0, 1, 1)$

b) Buscamos el plano φ que contiene $\begin{cases} r\begin{cases} P_r(1, -1, 0) \\ \vec{v_r}(0, 1, 1) \end{cases} \\ Q\,(2, 1, 3) \end{cases}$

Luego el plano φ queda determinado por el punto $P_r(1, -1, 0)$ y los vectores $\vec{v_r}$ y $\overrightarrow{P_rQ}$

$\overrightarrow{P_rQ} = (2, 1, 3) - (1, -1, 0) = (1, 2, 3)$

La ecuación del plano φ será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(3-2) - (y+1)(-1) + z(-1) = 0$$

$$(x-1) + (y+1) - z = 0$$

$x - 1 + y + 1 - z = 0$

$x + y - z = 0$

Luego, ***la ecuación del plano buscado es*** $\boldsymbol{\varphi: x + y - z = 0}$

c) Para que $r \subset \tau$*, cualquier punto de la recta* r *verificará la ecuación del plano* τ*. Luego*

$\forall \lambda \in \Re, \quad 3 \, . \, 1 - (-1 + \lambda) - a \, \lambda = b$

$3 + 1 - \lambda - a \, \lambda = b$

$4 - \lambda - a \, \lambda = b$

Para $\lambda = 0 \;\rightarrow\; 4 = b$

Para $\lambda = 1 \;\rightarrow\; 4 - 1 - a = b; \quad 3 - a = b$*, sustituyendo el valor de* b *obtenido antes,* $3 - a = 4;$

$3 - 4 = a; \quad -1 = a$

Por lo tanto, ***el plano*** $\boldsymbol{\tau}$ ***contiene a la recta*** $\boldsymbol{r}$ ***para*** $\boldsymbol{a = -1}$ ***y*** $\boldsymbol{b = 4}$