PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+a\ y+2\ z=3 \\ x-3\ y+a\ z=-2 \\ x+y+2z=a \end{cases}$, donde a es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. *(4 puntos)*
b) La solución del sistema cuando $a = 0$. *(3 puntos)*
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. *(3 puntos)*

Solución:
En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6+2+a^2+6-a-2a = a^2-3a+2$$

$$a^2-3a+2=0$$

$$a = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} a_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ a_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $a = 1$ y $a = 2$

Para $a \neq 1$ y 2

$|A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 $\rightarrow$ ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.*

Para $a = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos los rangos de A y A´,

$$\text{En A,} \left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-1 = -4 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+3-2+9+2-1 = 8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 $\neq$ 3 = ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Para a = 2

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$*, estudiemos los rangos de A y A´,*

$$\text{En A,} \quad \left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{C_3 = C_1 + C_2\} = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < 3 = nº incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Respondamos las cuestiones,

a) ***El sistema es compatible cuando a ≠ 1.***
(Si a ≠ 1 y 2 sistema compatible determinado y si a = 2 sistema compatible indeterminado)

b) Si a = 0 (a ≠ 1 y 2), el sistema es compatible determinado.

La matriz ampliada de este nuevo sistema sería: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = \left(a^2 - 3a + 2\right)\Big|_{a=0} = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-18-4}{2} = -11; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4+4-6}{2} = -3; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3+9+2}{2} = 7$$

Si a = 0, la solución es: $\begin{cases} x = -11 \\ y = -3 \\ z = 7 \end{cases}$

c) Soluciones cuando el sistema es compatible indeterminado.
El sistema es compatible indeterminado para a = 2.
El sistema a sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo. Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x - 3y + 2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 - 2z \\ x - 3y = -2 - 2z \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3-2z & 2 \\ -2-2z & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{-9+6z+4+4z}{-5} = \dfrac{-5+10z}{-5} = 1 - 2z \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 1 & -2-2z \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{-2-2z-3+2z}{-5} = \dfrac{-5}{-5} = 1 \end{array}$$

Cuando el sistema es compatible indeterminado su solución es: $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$