PROBLEMA 2. Se da los planos π: $x + y = 1$ y π′: x − y + z = 1 y el punto P(1,−1,0).
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π′. *(3 puntos)*
b) La distancia de la recta r a los planos π y π′. *(3 puntos)*
c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π′. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿Recta r? / $P \in r$ y r es paralela a π y π′.

$\pi: x + y = 1 \;\rightarrow\; \overrightarrow{n_\pi}\,(1,1,0)$; $\quad \pi': x - y + z = 1 \;\rightarrow\; \overrightarrow{n_{\pi'}}\,(1,-1,1)$.

El vector director de la recta r debe ser un vector que sea paralelo a los dos planos.

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_\pi} \times \overrightarrow{n_{\pi'}} \;\rightarrow\; \vec{v} \perp \begin{cases} \overrightarrow{n_\pi} \\ \overrightarrow{n_{\pi'}} \end{cases} \; y \; \begin{matrix} \overrightarrow{n_\pi} \perp \pi \\ \overrightarrow{n_{\pi'}} \perp \pi' \end{matrix} \;\rightarrow\; \vec{v} \,//\, \begin{cases} \pi \\ \pi' \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\cdot(-1-1) = (1,-1,-2) \approx (-1,1,2)$$

$$\text{De la recta r conocemos: } \left\langle \begin{matrix} \text{punto} \quad P(1,-1,0) \\ v.\,\text{director}, \; \vec{v}_r = (-1,1,2) \end{matrix} \right.$$

$$\textbf{Las ecuaciones paramétricas de r: } \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

b) ¿d(r , π) y d(r , π′)?

$\pi: x + y - 1 = 0$, $\quad \pi': x - y + z - 1 = 0$ y $P(1,-1,0)$.

$$\text{Como } r \,//\, \pi \;\rightarrow\; d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|1 + (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Como } r \,//\, \pi' \;\rightarrow\; d(r,\pi') = d(P,\pi') = \frac{|1 - (-1) + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\textbf{Solución: } \; d(r,\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y \quad d(r,\pi') = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot$$

c) ¿Recta s? / $P \in s$ y s corta ⊥ recta $t: \begin{cases} \pi \\ \pi' \end{cases}$.

Ecuación de la recta t:

$t: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$, *en este sistema* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$ *; la ecuación de t la obtenemos resolviendo el sistema:* $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 - z \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1-z & -1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-1-1+z}{-2}=\frac{-2+z}{-2}=1-\frac{1}{2}z$$
$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1-z\end{vmatrix}}{-2}=\frac{1-z-1}{-2}=\frac{-z}{-2}=\frac{1}{2}z$$
$$\rightarrow \quad t:\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}\lambda\\ y=\frac{1}{2}\lambda\\ z=\lambda\end{cases} \qquad \lambda\in\Re$$

Simplifiquemos la ecuación de t usando otro vector director.

Hemos obtenido que $\vec{v_t}\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},1\right)\approx(-1,1,2)$. *Por lo que* $t:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=2\lambda\end{cases} \quad \lambda\in\Re$

Un punto genérico de la recta t será $Q(1-\lambda,\ \lambda,\ 2\lambda)$.

La recta s que buscamos debe cumplir que $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{v_t}$, *es decir,* $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v_t}=0$.

P(1,−1,0), luego $\overrightarrow{PQ}=(1-\lambda-1,\ \lambda-(-1),\ 2\lambda-0)=(-\lambda,\ \lambda+1,\ 2\lambda)$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v_t}=(-\lambda,\ \lambda+1,\ 2\lambda)\cdot(-1,1,2)=\lambda+\lambda+1+4\lambda=6\lambda+1 \ \rightarrow\ 6\lambda+1=0\ \rightarrow\ \lambda=\frac{-1}{6}$$

Y $Q\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right),-\frac{1}{6},2\cdot\frac{-1}{6}\right)=\left(\frac{7}{6},\frac{-1}{6},\frac{-2}{6}\right)$

De la recta s conocemos: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto} \quad P(1,-1,0)\\ \text{v. director, } \vec{v_s}=\overrightarrow{PQ}\left(-\frac{-1}{6},\frac{-1}{6}+1,\ 2\cdot\frac{-1}{6}\right)=\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{-2}{6}\right)\approx(1,5,-2)\end{array}\right.$

Las ecuaciones paramétricas de s: $\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-1+5\lambda \quad \lambda\in\Re.\\ z=-2\lambda\end{cases}$