PROBLEMA 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función *f*. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. *(3 + 1 puntos)*

c) El valor de $\int_2^3 f(x)\,dx.$ *(3 puntos)*

Solución:

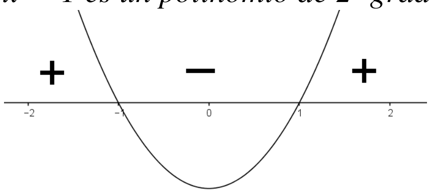
a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Dom f(x),

$x^2-1>0$

$x^2-1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

x^2 – 1 es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces – 1 y 1, luego



Por tanto, Dom f(x) = (– ∞, – 1) ∪ (1 , + ∞).

Asíntotas,

verticales,

x = – 1 por la izquierda

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=-1 \text{ es asíntota vertical por la izquierda.}$$

x = 1 por la derecha

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \text{ es asíntota vertical por la derecha.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\{\text{como } x<0\}=-1\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=\{\text{como } x>0\}=1\end{array}\right\}\rightarrow$$

tiene dos asíntotas horizontales: y = – 1 en – ∞ e y = 1 en + ∞.

oblicua, como la función tiene a. horizontal en ambos lados, no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, las asíntotas de la función f son:

asíntotas verticales: x = – 1 por la izquierda y x = 1 por la derecha

asíntotas horizontales: y = – 1 en – ∞ e y = 1 en + ∞.

b) Monotonía y representación gráfica.

Para la monotonía calculamos $f'(x)$ y estudiamos su signo.

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\,\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\,2x}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{-1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$$

En el estudio del dominio de $f(x)$ hemos obtenido que $x^2-1>0\ \ \forall\, x\in Dom\ f(x)$, además, $\forall\, x\in Dom\ f(x)$, $\sqrt{x^2-1}>0$; por tanto $f'(x)<0\ \ \forall\, x\in Dom\ f(x)$.

Luego, $f(x)$ es decreciente en su dominio.

Representación gráfica de $f(x)$.

De la función conocemos: dominio, asíntotas y monotonía.

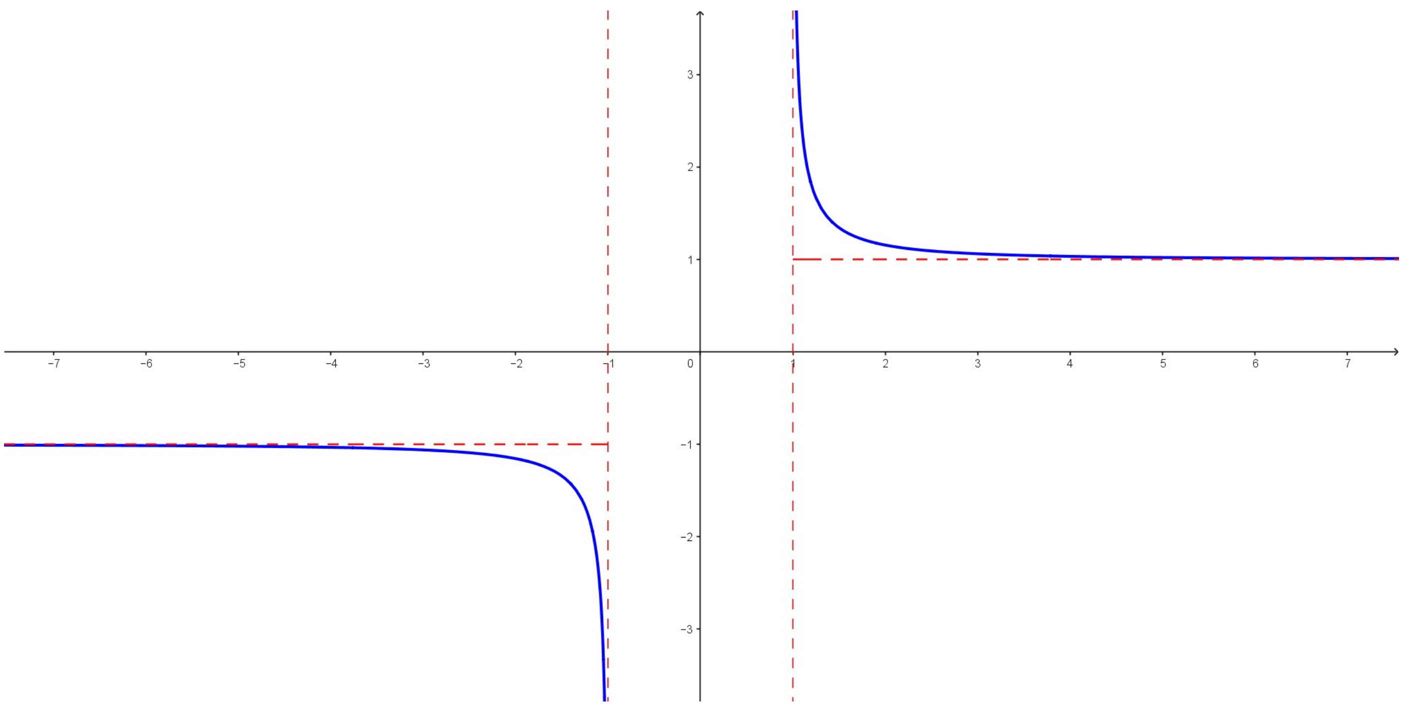
Puntos de corte:

Corte eje OX, $y=0$, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0$; $x=0\ \notin Dom\ f(x)\cdot$ No corta al eje OX

Corte eje OY, $x=0\ \notin Dom\ f(x)\cdot$ No corta al eje OY

Como $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ entonces si $x<-1$, {numerador negativo y denominador positivo}, $f(x)<0$; si $x>1$, {numerador y denominador positivos}, $f(x)>0$.

Considerando todo lo anterior, la representación gráfica de $f(x)$ será:



c) $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx.$

Calculemos: $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\left\{t=x^2-1;\quad dt=2x\,dx;\quad x\,dx=\frac{dt}{2}\right\}=\int\frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}=\sqrt{x^2-1}$

Finalmente, $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx=\left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3=\left(\sqrt{3^2-1}\right)-\left(\sqrt{2^2-1}\right)=\sqrt{8}-\sqrt{3}$

Solución: $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx=\sqrt{8}-\sqrt{3}$