PROBLEMA 4. Sea $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. *(3 puntos)*
b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1}= A^2 + a A + b I$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica $A^3 - 3 A^2 + 3 A - I = 0$ siendo I la matriz identidad. *(3 puntos)*
c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿ $\exists A^{-1}$?

$$\exists A^{-1} \quad si \quad |A|\neq 0$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y,\ A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) ¿a, b? / $A^{-1} = A^2 + a A + b I$. *Sabiendo que* $A^3 - 3 A^2 + 3 A - I = 0$ {1}

Partimos de: $A^{-1} = A^2 + a A + b I$, *multiplicando por la matriz* A *por la izquierda,*

$A A^{-1} = A A^2 + A a A + A b I$;

$I = A^3 + a A^2 + b A$;

$A^3 + a A^2 + b A - I = 0$; *comparando esta expresión con la {1}, que sabemos que se cumple, deducimos que* $a = -3$ *y* $b = 3$.

Solución, $a = -3$ y $b = 3$.

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *tenga infinitas soluciones.*

Calculemos A - λ I.

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}=B$$

Para que el sistema indicado, que es homogéneo, tenga infinitas soluciones debe ser / B / = 0.

$$|B|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^3; \qquad (1-\lambda)^3=0; \quad 1-\lambda=0; \quad \lambda=1$$

Para λ = 1, el sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2y=0 \\ 2y=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 2y=0; \quad y=0 \quad \rightarrow \quad Solución\ del\ sistema:\begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=\beta \end{cases} \quad \alpha,\beta\in\Re$$

Solución: el sistema de este apartado tiene infinitas soluciones para $\lambda = 1$ y para este valor de λ la solución del sistema es $\begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=\beta \end{cases} \quad \alpha,\beta\in\Re\cdot$