PROBLEMA 5. Sea dan las rectas $r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda, \quad \lambda\in\Re, \\ z=2\lambda \end{cases}$ $s:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ y el plano $\pi: 3x + ay - z + 1 = 0.$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π. *(4 puntos)*

b) La distancia entre las rectas r y s. *(3 puntos)*

c) El coseno del ángulo que forma la recta r y la recta $t:\begin{cases} 2x-y=0 \\ y-z=2 \end{cases}$. *(3 puntos)*

Solución:

a) $¿\exists a? /\ r\subset\pi.$

Sustituyendo x, y, z de r en π,

$3\cdot 1 + a(2+\lambda) - 2\lambda + 1 = 0$; *en esta ecuación la incógnita es* λ.

$3 + 2a + a\lambda - 2\lambda + 1 = 0;$

$a\lambda - 2\lambda = -4 - 2a; \quad (a-2)\lambda = -4-2a$

Esta ecuación tendrá infinitas soluciones cuando:

$$\begin{cases} a-2=0 \\ -4-2a=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ -2a=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=\dfrac{4}{-2}=-2 \end{cases}$$, *(valores de a distintos) por lo que no hay solución.*

Por lo tanto, ***no hay valor de a / r*** $\boldsymbol{\subset\pi}$.

b) $¿d(r,s)?$

De las rectas: $r:\left\langle \begin{array}{l} \text{punto} \quad P_r(1,2,0) \\ \text{v. director}, \ \vec{v}_r=(0,1,2) \end{array}\right.$ $\quad s:\left\langle \begin{array}{l} P_s(-1,0,2) \\ \vec{v}_s=(2,-1,1) \end{array}\right.$

Estudiemos la posición relativa de las rectas r y s.

Debemos estudiar la matriz ampliada: $A'=\begin{pmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$\text{En } A,\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \rightarrow ran(A)=2$$

$$\text{En } A',\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+8+4-4=10\neq 0 \rightarrow ran(A')=3$$

$\rightarrow$ *las rectas r y s se cruzan.*

Por lo que,

$$d(r,s)=\frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_rP_s} \end{vmatrix}\right|}{\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|}$$ *calculemos,*

$$\left|\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad \overrightarrow{P_rP_s}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \quad (\textit{calculado anteriormente})$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 3 - \vec{j} \cdot (-4) + \vec{k} \cdot (-2) = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} =$$

$$= (3,4,-2)$$

$$\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

Luego $d(r,s) = \dfrac{|10|}{\sqrt{29}} = \dfrac{10}{\sqrt{29}}$ *u.l.*

c) ¿cos α? siendo $\alpha = (\widehat{r,t})$ *y* $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$.

Necesitamos los vectores directores de ambas rectas. Sabemos que $\vec{v}_r = (0,1,2)$

De $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y - 2 = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{2} \\ z = -2 + y \end{cases} \rightarrow t: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \Re$

Luego, $\vec{v}_t = \left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right) \cong (1,2,2)$

Y $\cos\alpha = \dfrac{|\,(0,1,2)\,(1,2,2)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}\,\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{|2+4|}{\sqrt{5}\,\sqrt{9}} = \dfrac{6}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Solución, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.