

OPCIÓN A**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas****Problema 1.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y el vector } c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ se pide :}$$

- a) Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1} . (2 + 4 puntos)
 b) Determina el vector x que verifica $Ax = B^t c$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B. (4 puntos)

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 4 = 1. \text{ Por tanto, } |A| \neq 0$$

Como $|A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$ Cálculo de A^{-1} ,

$$A \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) ¿Vector x ? / $Ax = B^t c$ Calculemos $B^t c$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ luego } B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2) - 1(-1) + 2 \cdot 3 \\ -2(-2) + 2(-1) - 1 \cdot 3 \\ 0(-2) + 2(-1) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 1 + 6 \\ 4 - 2 - 3 \\ 0 - 2 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ multiplicando por la izquierda por } A^{-1},$$

$$A^{-1} A x = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow I x = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow x = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 1(-1) + 6 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 - 1(-1) + 5 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 - 1(-1) + 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 1 + 42 \\ 10 + 1 + 35 \\ 10 + 1 + 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$