Problema 1. Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2500 unidades de tinta y de 3000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? *(8 puntos)*

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? *(2 puntos)*

Solución:

Llamando: x = *nº de unidades del bolígrafo sencillo* y = *nº de unidades del bolígrafo sofisticado*

Los datos del problema los resumimos en la tabla:

bolígrafo	*tinta*	*plástico*	*ganancias/unidad*
sencillo	*1*	*1*	*0´50 €*
sofisticado	*1*	*1´5*	*0´70 €*

Las restricciones serán:

"dispone de 2500 unidades de tinta" $\rightarrow$ $x + y \leq 2500$

"dispone de 3000 unidades de plástico" $\rightarrow$ $x + 1´5\,y \leq 3000$

"no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos" $\rightarrow$ $x \leq 2000$

Como las variables x *e* y *representan latas, deben ser números naturales.*

Las ganancias de la empresa vienen dadas por la función: $z = 0´5\,x + 0´7\,y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 0´5\,x + 0´7\,y$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} x + y \leq 2500 \\ x + 1´5\,y \leq 3000 \\ x \leq 2000 \\ x,\ y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$x + y \leq 2500$

$x + y = 2500$

x	y
0	2500
2500	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \leq 2500$ *Sí*

$x + 1´5y \leq 3000$

$x + 1´5y = 3000$

x	y
0	2000
3000	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 1´5 \cdot 0 \leq 3000$ *Sí*

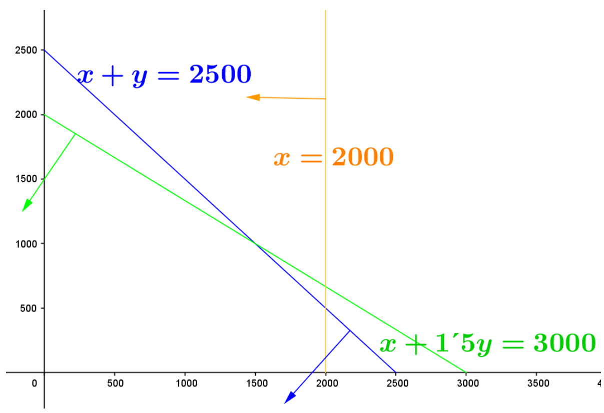
$x \leq 2000$

$x = 2000$

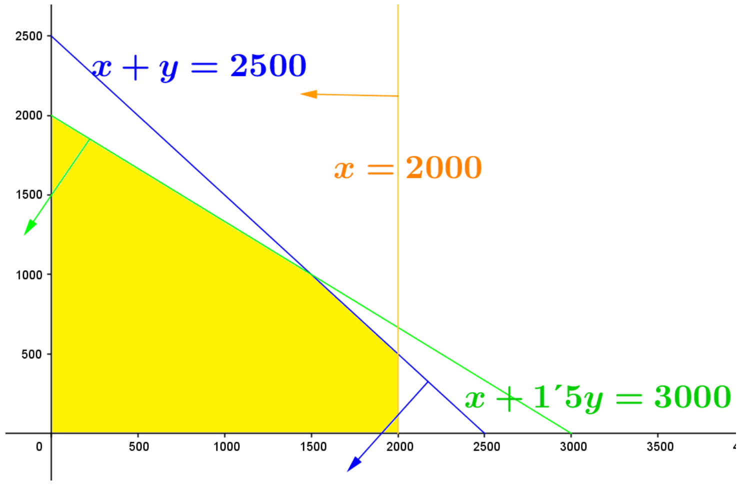
x	y
2000	0
2000	1000

¿(0,0) cumple?

$0 \leq 2000$ *Sí*



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

Los de los ejes coordenados los obtuvimos en los cálculos para la representación: (0 , 0), (0 , 2000) y (2000, 0). Faltan los puntos de corte entre las rectas.

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} x + y = 2500 \\ x + 1'5\,y = 3000 \end{cases} \rightarrow \quad -1x1^{a} \begin{cases} -x - y = -2500 \\ x + 1'5\,y = 3000 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $0'5\,y = 500; \quad y = \dfrac{500}{0'5} = 1000$

Sustituyendo el valor de y *en la* 1^{a} *ecuación,*

$x + 1000 = 2500; \quad x = 2500 - 1000; \quad x = 1500$ *Luego punto de corte (1500 , 1000)*

$$\begin{cases} x + y = 2500 \\ x = 2000 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la* 1^{a} *ecuación,*

$2000 + y = 2500; \quad y = 2500 - 2000; \quad y = 500$ *Luego punto de corte (2000 , 500)*

Los vértices de la región factible son: (0 , 0), (0 , 2000), (1500 , 1000), (2000 , 500) y (2000 , 0).

El máximo de z *en la región se alcanzará en alguno de los vértices. Calculemos la función en los vértices,*

x, y	$z = 0'5\,x + 0'7\,y$	
0 , 0	$0'5 \cdot 0 + 0'7 \cdot 0 = 0$	
0 , 2000	$0'5 \cdot 0 + 0'7 \cdot 2000 = 1400$	
1500 , 1000	$0'5 \cdot 1500 + 0'7 \cdot 1000 = 1450$	*máximo*
2000 , 500	$0'5 \cdot 2000 + 0'7 \cdot 500 = 1350$	
2000 , 0	$0'5 \cdot 2000 + 0'7 \cdot 0 = 1000$	

El máximo se alcanza en el punto (1500 , 1000). Por tanto,

- ***a)*** ***Para maximizar las ganancias la empresa debe producir 1500 bolígrafos sencillos y 1000 sofisticados.***
- ***b)*** ***Las ganancias máximas ascienden a 1450 euros.***