Problema 2. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Analiza si la matriz $A\,B-2\,I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. *(3 puntos)*

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A+2\,X\,C=B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B. *(4 puntos)*

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $C\,D=D\,C$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿$A\,B-2\,I$ es invertible?

Cálculos:

$$A\,B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 0 & 1\cdot 4+0\cdot 2 & 1\cdot 0+0\cdot 3 \\ 0\cdot(-1)+1\cdot 0 & 0\cdot 4+1\cdot 2 & 0\cdot 0+1\cdot 3 \\ -1\cdot(-1)+3\cdot 0 & -1\cdot 4+3\cdot 2 & -1\cdot 0+3\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A\,B-2I=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$A\,B-2\,I$ será invertible si su determinante es distinto de cero.

$$|A\,B-2I|=\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}=12+18=30\neq 0\quad\rightarrow\quad\exists\,(A\,B-2I)^{-1}$$

Solución: la matriz A B – 2 I es invertible.

b) ¿Matriz X? / $A+2\,X\,C=B^t$

Despejemos X,

$2\,X\,C=B^t-A$; $X\,C=\frac{1}{2}(B^t-A)$; *si existe* C^{-1} *entonces, multiplicando por* C^{-1} *por la derecha*

$$X\,C\,C^{-1}=\frac{1}{2}(B^t-A)C^{-1};\quad X\,I=\frac{1}{2}(B^t-A)C^{-1};\quad X=\frac{1}{2}(B^t-A)C^{-1}$$

Como $|C|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0\quad\rightarrow\quad\exists\,C^{-1}$

Cálculo de C^{-1},

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad C^{-1}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X,

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(B^t - A\right)C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 0 + 0\cdot 1 & -2\cdot 1 + 0\cdot(-3) \\ 4\cdot 0 + 1\cdot 1 & 4\cdot 1 + 1\cdot(-3) \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente $X = \frac{1}{2}\left(B^t - A\right)C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) ¿Valor de z? / C D = D C

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -3+z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3+z & -1 \end{pmatrix}$$

Estas dos matrices serán iguales si $\begin{cases} -3+z=1 \\ 1=-3+z \end{cases}$ *que es la misma ecuación, por tanto resolvamos:* $-3+z=1;\quad z=1+3=4$

Solución: la matriz D cumple la condición C D = D C para z = 4.