Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$\left(3x^2-1\right)^2=0 \;\rightarrow\; 3x^2-1=0 \;\rightarrow\; 3x^2=1 \;\rightarrow\; x^2=\frac{1}{3} \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\left\{\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{1}{\left(3\cdot 0^2-1\right)^2}=\frac{1}{1}=1 \;\rightarrow\; (0,1)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=0;\quad 1=0 \quad Falso,\quad no\ corta\ al\ eje\ OX$$

$Dom\ f(x)=\Re-\left\{\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ ***y el único punto de corte con los ejes coordenados es: (0 , 1).***

b) Asíntotas horizontales y verticales.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=\frac{1}{\infty}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

, *la asíntota horizontal es y = 0.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que las posibles a.v. son $x=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ *o* $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\lim_{x\to\frac{-\sqrt{3}}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{-\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=\frac{1}{\left(3\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2-1\right)^2}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=\frac{-\sqrt{3}}{3}\ es\ a.v.$$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}=\frac{1}{\left(3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1\right)^2}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es y = 0 y las asíntotas verticales $x=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ *y* $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) *Monotonía.*

Estudiemos el signo de $f´(x)$

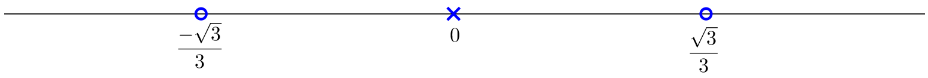
$$f´(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2} \frac{-1\cdot 2\,(3x^2-1)6x}{\left[(3x^2-1)^2\right]^2} = \frac{-12\,x\,(3x^2-1)}{(3x^2-1)^4} = \frac{-12x}{(3x^2-1)^3}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$-12x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

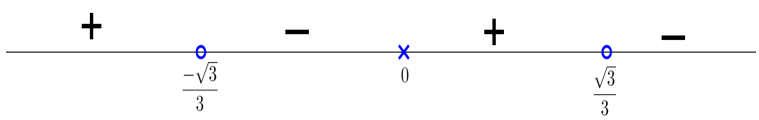
$$(3x^2-1)^3 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \cong \pm 0´58$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f´(x)$ *en los intervalos:* $\left[\ Dom\, f(x) = \Re - \left\{\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}\ \right]$



Calculemos el signo de $f´(x)$ *en cada uno de los intervalos,*

x	$f´(x) = \frac{-12x}{(3x^2-1)^3}$
-1	$\frac{-12\cdot(-1)}{(3\,(-1)^2-1)^3} = \frac{12}{8} > 0$
$-0´3$	$\frac{-12\cdot(-0´3)}{(3\,(-0´3)^2-1)^3} = \frac{3´6}{-0´3890} < 0$
$0´3$	$\frac{-12\cdot(0´3)}{(3\,(0´3)^2-1)^3} = \frac{-3´6}{-0´3890} > 0$
1	$\frac{-12\cdot 1}{(3\cdot 1^2-1)^3} = \frac{-12}{8} < 0$



Por tanto,

f(x) es creciente en $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ***y f(x) es decreciente en*** $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$**.**

d) *Máximos y mínimos locales.*

Del estudio anterior deducimos que en $x = 0$ $f(x)$ *tiene un mínimo local y que no tiene máximos locales.*

Para $x = 0$ $f(0) = 1$ *{calculado en el apartado a}*

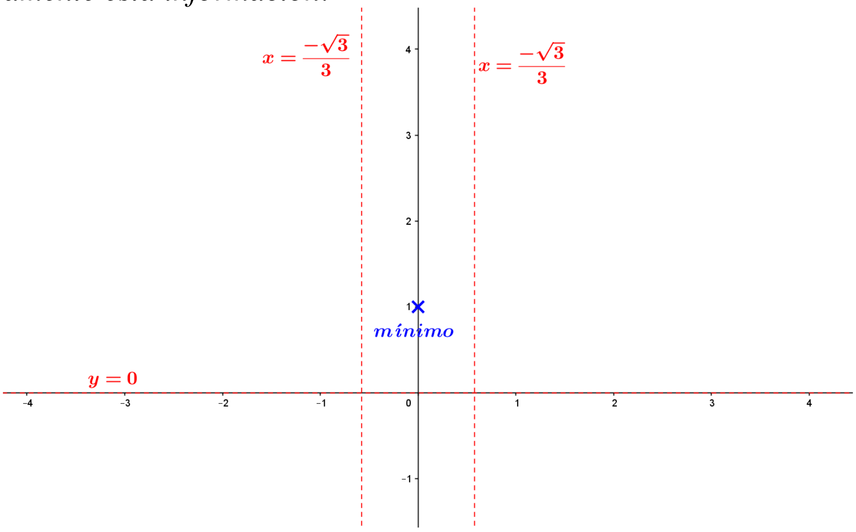
Solución: f(x) sólo tiene un mínimo local en (0 , 1).

e) Representación gráfica.

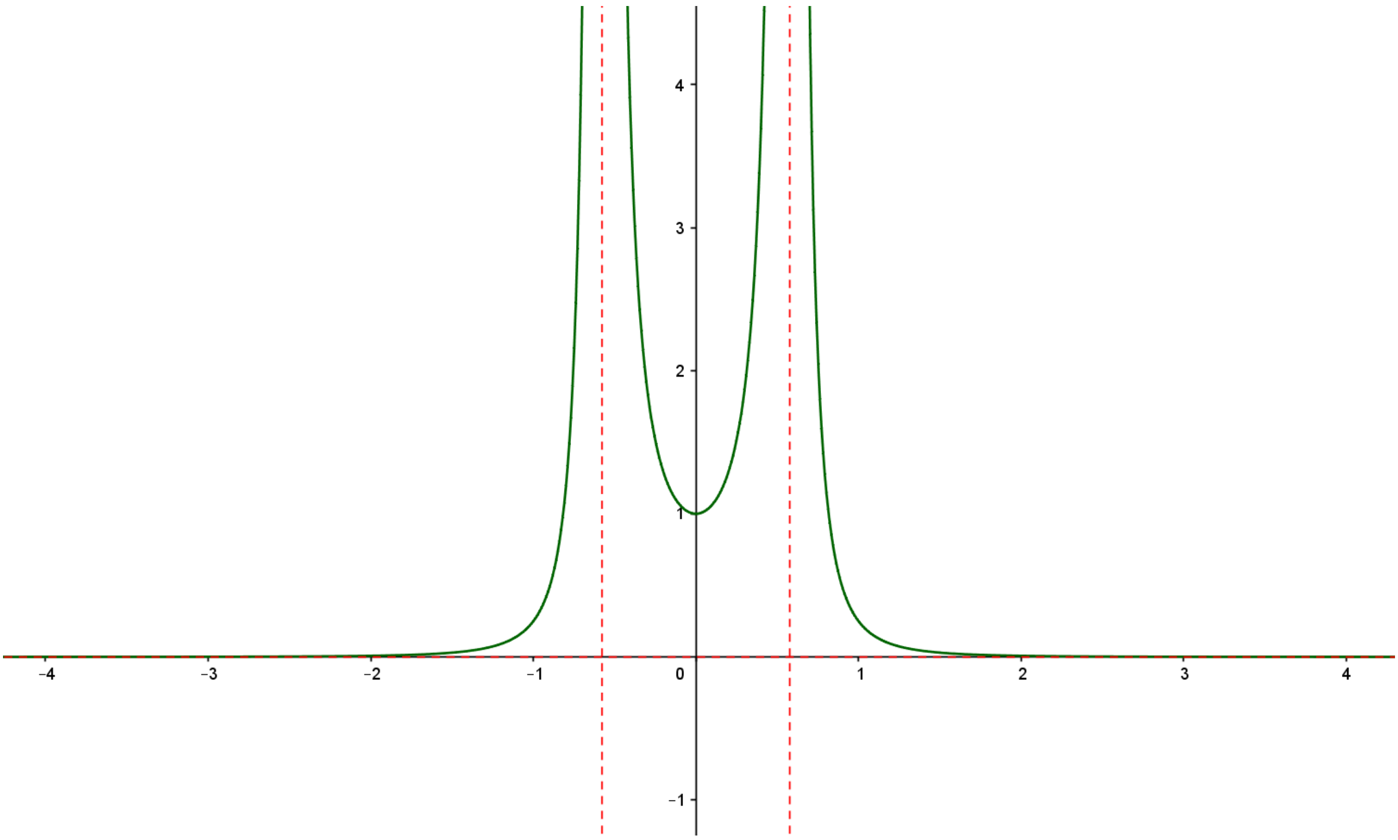
De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 1), mínimo local en (0 , 1); a.h. y = 0, a.v. $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ *y* $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Representando gráficamente esta información:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Si con la información anterior la representación no nos queda definida, calculamos puntos de la curva,

x	$f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$
-1	$\frac{1}{(3\,(-1)^2 - 1)^2} = \frac{1}{8} > 0$
1	$\frac{1}{(3 \cdot 1^2 - 1)^2} = \frac{1}{8} > 0$