Problema 4. Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2 + 60x + 100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? *(3 puntos)*

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? *(4 puntos)*

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? *(2 puntos)*

Solución:

Los ingresos que obtiene son $I(x) = -x^2 + 60x + 100$; *x kilos de abono.*

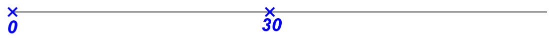
Como x representa kilos $\text{Dom } I(x) = [0, +\infty)$

a) ¿Cantidad de abono que maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos?

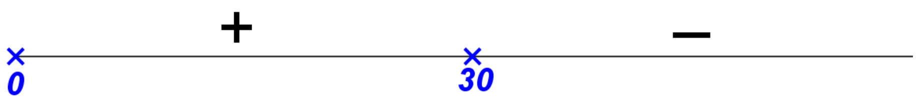
Buscamos el máximo de I(x).

$$I'(x) = -2x + 60; \quad -2x + 60 = 0; \quad -2x = -60; \quad x = \frac{-60}{-2} = 30.$$

Debemos estudiar el signo de I´(x) en los siguientes intervalos:



x	$I'(x) = -2x+60$
10	$-2\cdot 10+60 = 40 > 0$
40	$-2\cdot 40+60 = -20 < 0$



Por tanto en x = 30 hay un máximo relativo. Además, como a la izquierda de x = 30 la función es creciente y a la derecha decreciente, el máximo relativo es el absoluto de I(x).

Para $x = 30$, $I(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 + 100 = 1000$

Solución: la cantidad de abono que maximiza sus ingresos son 30 kg y estos ingresos máximos son de 1000€.

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos?

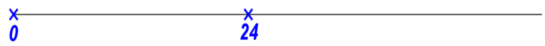
Beneficio = Ingresos – Costes, $B(x) = I(x) - 12x = -x^2 + 60x + 100 - 12x = -x^2 + 48x + 100$

Como x representa kilos $\text{Dom } B(x) = [0, +\infty)$

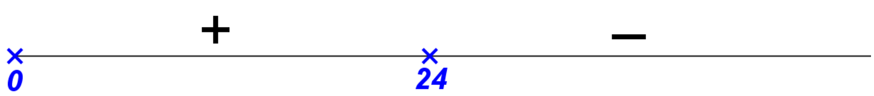
Buscamos el máximo de B(x),

$$B'(x) = -2x + 48; \quad -2x + 48 = 0; \quad -2x = -48; \quad x = \frac{-48}{-2} = 24.$$

Debemos estudiar el signo de B´(x) en los siguientes intervalos:



x	$B'(x) = -2x+48$
10	$-2\cdot 10+48 = 28 > 0$
30	$-2\cdot 30+48 = -12 < 0$



Por tanto en x = 24 hay un máximo relativo. Además, como a la izquierda de x = 24 la función es creciente y a la derecha decreciente, el máximo relativo es el absoluto de B(x).

Para $x = 24$, $B(24) = -24^2 + 48 \cdot 24 + 100 = 676$

Solución: la cantidad de abono que maximiza sus beneficios son 24 kg y estos beneficios máximos son de 676€.

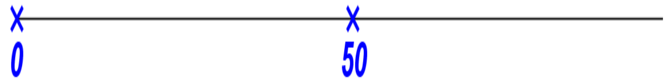
c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? $\quad$ *¿x? / B(x) > 0*

$$-x^2+48x+100>0$$

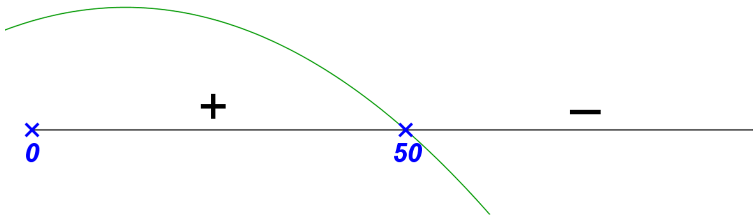
$$-x^2+48x+100=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-48\pm\sqrt{48^2-4\cdot(-1)\cdot 100}}{2\cdot(-1)}=\frac{-48\pm 52}{-2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-48+52}{-2}=-2 \\ x_2=\dfrac{-48-52}{-2}=50 \end{cases}$$

Dom B(x) = [0, +∞), por tanto {– 2} ∉ Dom B(x).

Hay que estudiar el signo de B(x) en los intervalos:



Como B(x) es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces – 2 y 50,*



Luego, B(x) > 0 si x ∈ (0 , 50).

Solución: para garantizar beneficios positivos debe emplear menos de 50 kg de abono.