Problema 2. A. Una empresa agrícola que se dedica al cultivo de frutas tropicales ha implementado un sistema de riego automatizado para optimizar el consumo de agua. La función que describe la necesidad de agua del cultivo (en m³/día) tras x días de crecimiento, para x entre 0 y 30, es:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-4x^2+10 & si \quad 0\le x\le 8 \\ 3x+9 & si \quad 8<x\le 20 \\ 70 & si \quad 20<x\le 30 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo [0,30]. *(0´75 puntos)*
b) Determina en qué días la necesidad de agua es máxima y mínima. *(2 puntos)*
c) Calcula el área delimitada por esta función y el eje *OX* entre los días 3 y 7. *(0´75 puntos)*

Solución:
a) Continuidad de esta función en el intervalo [0,30].

En el intervalo [0,8], f(x) es un polinomio de 3º grado luego es continua.

En el intervalo (8,20), f(x) es un polinomio de 1º grado luego es continua.

En el intervalo (20,30], f(x) es constante luego es continua.

Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.
Continuidad en x = 8,
a) $f(8) = 8^3 - 4 \cdot 8^2 + 10 = 266$
b) $\lim_{x\to 8} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-}\left(x^3-4x^2+10\right) = 266 \\ \lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+}\left(3x+9\right) = 3\cdot 8+9 = 33 \end{array} \right\} \ne$ *no existe* $\lim_{x\to 8} f(x)$

Por tanto f(x) no es continua en x = 8

Continuidad en x = 20,
a) $f(20) = 3 \cdot 20 + 9 = 69$
b) $\lim_{x\to 20} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 20^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-}\left(3x+9\right) = 69 \\ \lim_{x\to 20^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+}\left(70\right) = 70 \end{array} \right\} \ne$ *no existe* $\lim_{x\to 20} f(x)$

Por tanto f(x) no es continua en x = 20

Solución: f(x) es continua en [0 , 30] ~{ 8, 20 } y en x = 8 y x = 20 tiene una discontinuidad de salto finito (existen los límites laterales pero son distintos).

b) Determina en qué días la necesidad de agua es máxima y mínima.
Obtengamos los máximos y mínimos de f(x).
En el intervalo [0,8],

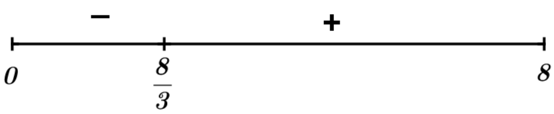
$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 10$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x; \quad 3x^2-8x=0; \quad x(3x-8)=0; \quad \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ 3x-8=0; \quad 3x=8; \quad x=\dfrac{8}{3}\cong 2´66\ldots \in [0,8) \end{array} \right.$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos: $0 \quad \frac{8}{3} \quad 8$

x	$f'(x)=3x^2-8x$
1	$f'(1)=3\cdot 1^2-8\cdot 1=-5<0$
3	$f'(3)=3\cdot 3^2-8\cdot 3=3>0$

el signo de f´(x) es:



Entonces en $x = 8/3$ hay un mínimo relativo por ser la función decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.

En el intervalo (8,20],

$f(x) = 3x + 9$, polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo por tanto creciente.

En el intervalo (20,30],

$f(x) = 70$, es constante (ni creciente ni decreciente).

Para determinar el máximo y el mínimo de f(x) debemos calcular el valor de f(x) en el mínimo relativo y en los extremos de los intervalos de definición.

x	$f(x)$
0	$0^3-4\cdot 0^2+10=10$
$8/3$	$\left(8/3\right)^3-4\cdot\left(8/3\right)^2+10=\dfrac{14}{27}\cong 0'5185$
8	$8^3-4\cdot 8^2+10=266$
8^+	$3\cdot 8+9=33$
20	$3\cdot 20+9=69$
30	70

$\rightarrow$ *El mínimo absoluto está en $x=\dfrac{8}{3}$ y el máximo absoluto en $x = 8$.*

Solución: la necesidad de agua es máxima a los 8 días y mínima a los 8/3..

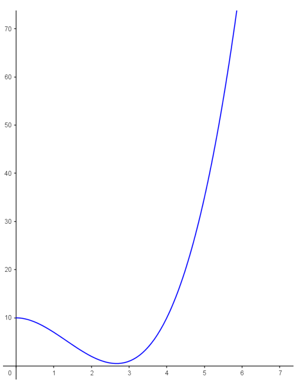
c) Calcula el área delimitada por esta función y el eje OX entre los días 3 y 7.

El intervalo $[3,7]\subset[0,8]$, por tanto en $[3,7]$ $f(x) = x^3 - 4x^2 + 10$

De la función f(x), considerando los cálculos de los apartados anteriores, conocemos:

$f(0) = 10$, $f(8) = 266$ y tiene un mínimo relativo en $\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{14}{27}\right)\cong(2'6667, 0'5185)$.

Gráficamente:



La función f(x) en el intervalo [3,7] está por encima del eje OX, por tanto, el área pedida se obtiene mediante la siguiente integral definida:

$$\int_3^7\left(x^3-4x^2+10\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+10x\right]_3^7=$$

$$=\left(\frac{7^4}{4}-4\frac{7^3}{3}+10\cdot 7\right)-\left(\frac{3^4}{4}-4\frac{3^3}{3}+10\cdot 3\right)=$$

$$=\frac{2555}{12}-\frac{57}{4}=\frac{596}{3}\cong 198'6667$$

Solución: el área de la región indicada mide $\dfrac{596}{3}$ u.a.