Problema 2. B. Cuando la temperatura de un invernadero se mantiene a x grados centígrados, siendo x un número real entre 10 y 30, la producción (en kilogramos) de cierta hortaliza viene dada por la función $Q(x) = 30\ x^2 + A\ x + B - x^3$. Sabemos que la producción máxima se alcanza cuando el invernadero se mantiene a 21 grados centígrados, y que dicha producción máxima es 5.300 kg.

a) Determina los valores A y B que aparecen en la función $Q(x)$. *(0,75 puntos)*
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $Q(x)$. *(1 punto)*
c) Para valores de la temperatura comprendidos entre 10 y 30 grados centígrados, ¿en algún caso se obtiene una producción inferior a 1.000 kg? *(1 punto)*

Solución:

$Q(x) = 30x^2 + A\,x + B - x^3 \quad x \in [10, 30]$.

a)

De los datos del problema “la producción máxima se alcanza para x = 21 y es de 5300”, entonces, para x = 21 $\quad Q'(21) = 0 \quad y \quad Q(21) = 5300$

$Q'(x) = 60\,x + A - 3\,x^2;\quad Q'(21) = 60\,.\,21 + A - 3\,.\,21^2 = A - 63$ *entonces* $A - 63 = 0;\quad A = 63$

$Q(21) = 5300;\quad 5300 = 30\,.\,21^2 + 63\,.\,21 + B - 21^3;\quad B + 5292 = 5300;\quad B = 5300 - 5292 = 8$

***Solución:* $A = 63$ *y* $B = 8$. $\quad Q(x) = 30\,x^2 + 63\,x + 8 - x^3 \quad x \in [\,10\,,\,30\,]$.**

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función Q(x).

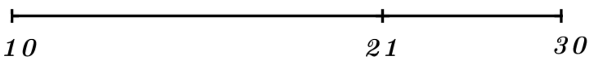
Debemos estudiar el signo de Q´(x).

$Q(x) = 30x^2 + 63\,x + 8 - x^3 \quad \rightarrow \quad Q'(x) = 60x + 63 - 3x^2$

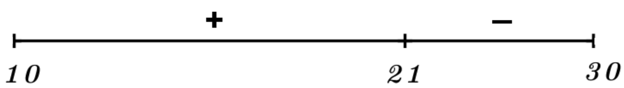
$Q'(x) = 0;\quad 60x + 63 - 3x^2 = 0;\quad -3x^2 + 60x + 63 = 0;$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4\cdot(-3)\cdot 63}}{2\cdot(-3)} = \frac{-60 \pm 66}{-6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-60+66}{-6} = -1 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-60-66}{-6} = 21 \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de Q´(x) en los intervalos:



	$Q'(x) =$
15	$-3\cdot 15^2 + 60\cdot 15 + 63 = 288 > 0$
25	$-3\cdot 25^2 + 60\cdot 25 + 63 = -312 < 0$



Solución: Q(x) es creciente en (10 , 21) y decreciente en (21 , 30).

c) Para valores de la temperatura comprendidos entre 10 y 30 grados centígrados, ¿en algún caso se obtiene una producción inferior a 1.000 kg?

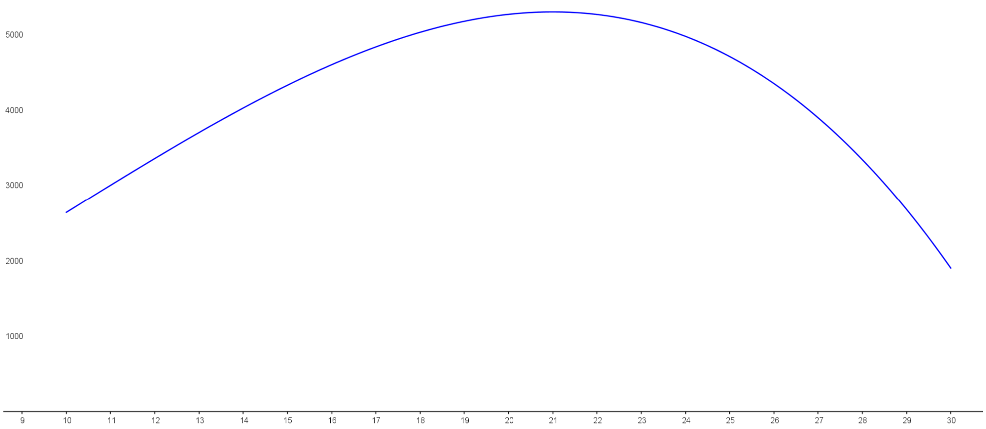
De los datos del enunciado sabemos que $Q(21) = 5300$. Calculemos el valor de Q en los extremos del intervalo:

$$Q(10) = 30 \cdot 10^2 + 63 \cdot 10 + 8 - 10^3 = 2638$$

$$Q(30) = 30 \cdot 30^2 + 63 \cdot 30 + 8 - 30^3 = 1898$$

Considerando que $Q(x)$ es creciente en $(10, 21)$ y decreciente en $(21, 30)$ el valor mínimo de $Q(x)$ se alcanzará en los extremos del intervalo (el valor mínimo es 1898). Por lo tanto, nunca se obtendrá una producción inferior a 1000 kg.

Gráficamente:



Solución: para valores de la temperatura comprendidos entre 10 y 30 grados centígrados, nunca se obtiene una producción inferior a 1.000 kg.