Problema 1. B. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2\,X\,A + B^t\,C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B. *(2,5 puntos)*

b) Consideremos la matriz $D=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de z la matriz $A\,D$ es diagonal. *(0,5 puntos)*

Solución:

a) ¿Matriz X? / $2\,X\,A + B^t\,C = I$.

B es 2 x 3, B^t es 3 x 2, C es 2 x 3 $\rightarrow$ *$B^t\,C$ es 3x3*

$2\,X\,A + B^t\,C = I \;\rightarrow\; 2\,X\,A = I - B^t\,C;$

Si existe A^{-1} $\rightarrow$ multiplicando por la derecha por A^{-1}: $2\;X\;A\;A^{-1} = (I - B^t\;C)\;A^{-1}$

{como $A\;A^{-1} = I$} $\rightarrow\; 2\,X = (I - B^t\,C)\,A^{-1} \;\rightarrow\; X = \frac{1}{2}\left(I - B^tC\right)A^{-1}$

Cálculos:

$*\;A^{-1}$

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix} = 6 \neq 0 \;\rightarrow\; \exists\, A^{-1}$$

Cálculo de la inversa de A,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ -6 & 0 & 3\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 3\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}6 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 1/3\\ 0 & -1/2 & 1/6\end{pmatrix}$$

$$*\;X = \frac{1}{2}\left(I - B^tC\right)A^{-1}$$

$$B^t\,C = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot(-1)-1\cdot 4 & 3\cdot 0-1\cdot 2 & 3\cdot 1-1\cdot 2\\ 1\cdot(-1)+0\cdot 4 & 1\cdot 0+0\cdot 2 & 1\cdot 1+0\cdot 0\\ 0\cdot(-1)-1\cdot 4 & 0\cdot 0-1\cdot 2 & 0\cdot 1-1\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ -4 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$I - B^t\,C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(I - B^t\,C\right)A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8+\frac{3}{2} & \frac{-8}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{6} \\ 1 & 1+\frac{1}{2} & \frac{-1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6} \\ 4 & 4-\frac{1}{2} & \frac{-4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \frac{19}{2} & \frac{-5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{6} \\ 4 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente: $$X = \frac{1}{2}\left(I - B^t\,C\right)A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & \frac{19}{2} & \frac{-5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{6} \\ 4 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{19}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{12} \\ 2 & \frac{7}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

Solución: $$X = \begin{pmatrix} 4 & \frac{19}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{12} \\ 2 & \frac{7}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

b) ¿z? / A D es diagonal.

La matriz A D es diagonal cuando todos sus elementos fuera de la diagonal principal son 0.

$$A\,D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1+2z \\ 0 & 0 & 1-2z \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A D será diagonal cuando: $$\begin{cases} -1+2z=0 \\ 1-2z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2z=1 \\ 1=2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow z=\frac{1}{2}$$

Solución: la matriz A D es diagonal para z = ½.