

Problema 1. B. Una empresa de joyería tiene dos máquinas, A y B, con las que puede hacer anillos, pulseras y collares. La empresa tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 2 anillos, 8 pulseras y 4 collares, mientras que la máquina B realiza 9 anillos, 4 pulseras y 10 collares. Durante la próxima semana la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares. El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es 250 euros y el de la máquina B es 600 euros.

- a) ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para que el coste total de producción sea mínimo? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? (0,5 puntos)

Solución:

Llamando: x = horas de trabajo de la máquina A

y = horas de trabajo de la máquina B

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

		producción/h			
	horas	Anillos	Pulseras	collares	Coste/h
A	x	2	8	4	250€
B	y	9	4	10	600€
Producción mínima		80	96	120	

El problema proporciona las siguientes restricciones:

Durante la próxima semana la empresa debe producir

al menos 80 anillos $\rightarrow 2x + 9y \geq 80$

al menos 96 pulseras $\rightarrow 8x + 4y \geq 96$

al menos 120 collares $\rightarrow 4x + 10y \geq 120$

Como las variables x e y representan litros $x, y \geq 0$.

El coste viene dado por la función: $z = 250x + 600y$

El problema a resolver es:

minimizar $z = 250x + 600y$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2x + 9y \geq 80 \\ 8x + 4y \geq 96 \\ 4x + 10y \geq 120 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $2x + 9y \geq 80$

(b) $8x + 4y \geq 96$

(c) $4x + 10y \geq 120$

$2x + 9y = 80$

$8x + 4y = 96$

$4x + 10y = 120$

x	y
0	$\frac{80}{9} \cong 8,88$
40	0

x	y
0	24
12	0

x	y
0	12
30	0

¿(0,0) cumple?

¿(0,0) cumple?

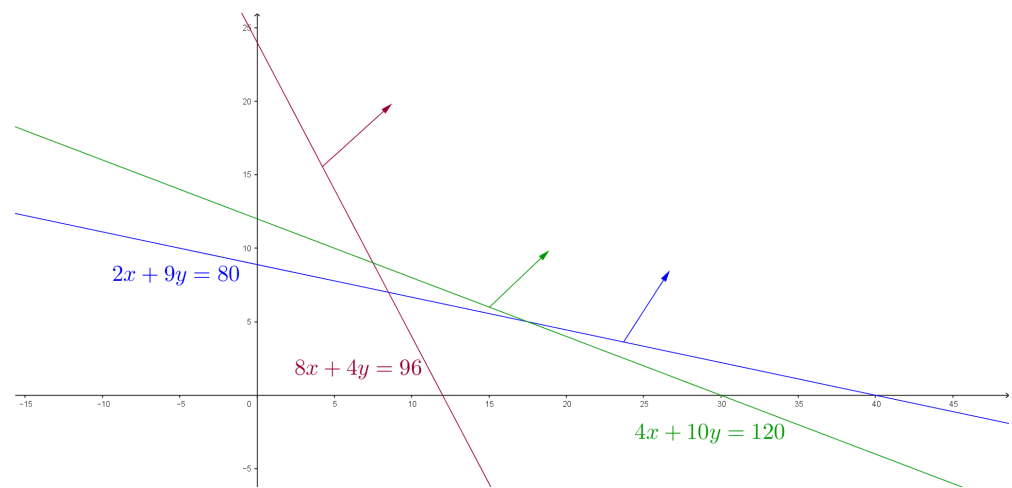
¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 9 \cdot 0 \geq 80$ No

$8 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \geq 96$ No

$4 \cdot 0 + 10 \cdot 0 \geq 120$ No

La representación gráfica será:



Puntos de corte entre las rectas:

Punto de corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 2x + 9y = 80 & -4x \text{I}^a \begin{cases} -8x - 36y = -320 \\ 8x + 4y = 96 \end{cases} \\ 8x + 4y = 96 & 2^a \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } -32y = -224; \quad y = \frac{-224}{-32} = 7$$

Sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación:

$$8x + 4 \cdot 7 = 96; \quad 8x = 96 - 28; \quad 8x = 68; \quad x = \frac{68}{8} = 8.5 \rightarrow (8.5, 7)$$

Punto de corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} 2x + 9y = 80 & -2x \text{I}^a \begin{cases} -4x - 18y = -160 \\ 4x + 10y = 120 \end{cases} \\ 4x + 10y = 120 & 2^a \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } -8y = -40; \quad y = \frac{-40}{-8} = 5$$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación:

$$2x + 9 \cdot 5 = 80; \quad 2x = 80 - 45; \quad 2x = 35; \quad x = \frac{35}{2} = 17.5 \rightarrow (17.5, 5)$$

Punto de corte entre (b) y (c):

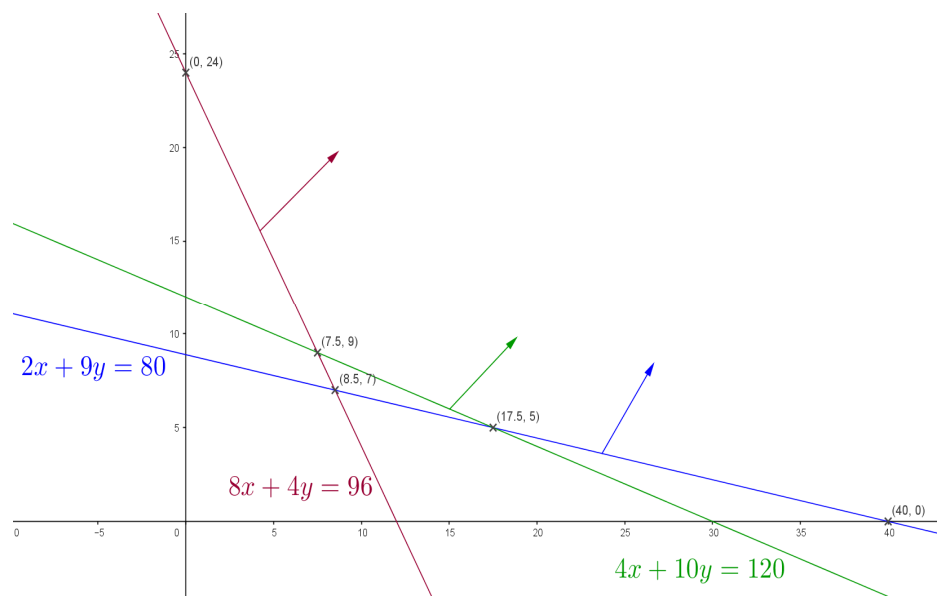
$$\begin{cases} 4x + 10y = 120 & -2x \text{I}^a \begin{cases} -8x - 20y = -240 \\ 8x + 4y = 96 \end{cases} \\ 8x + 4y = 96 & 2^a \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } -16y = -144; \quad y = \frac{-144}{-16} = 9$$

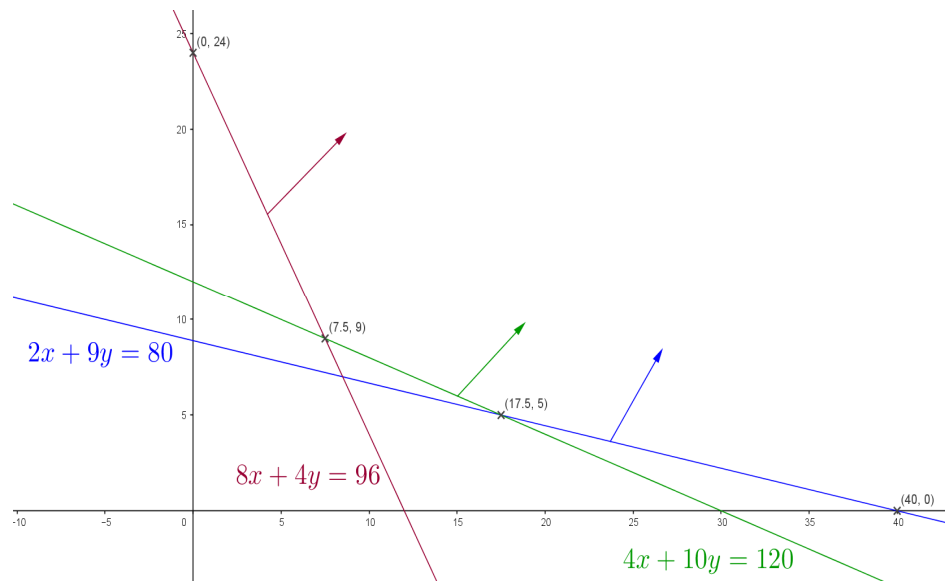
Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación:

$$4x + 10 \cdot 9 = 120; \quad 4x = 120 - 90; \quad 4x = 30; \quad x = \frac{30}{4} = 7.5 \rightarrow (7.5, 9)$$

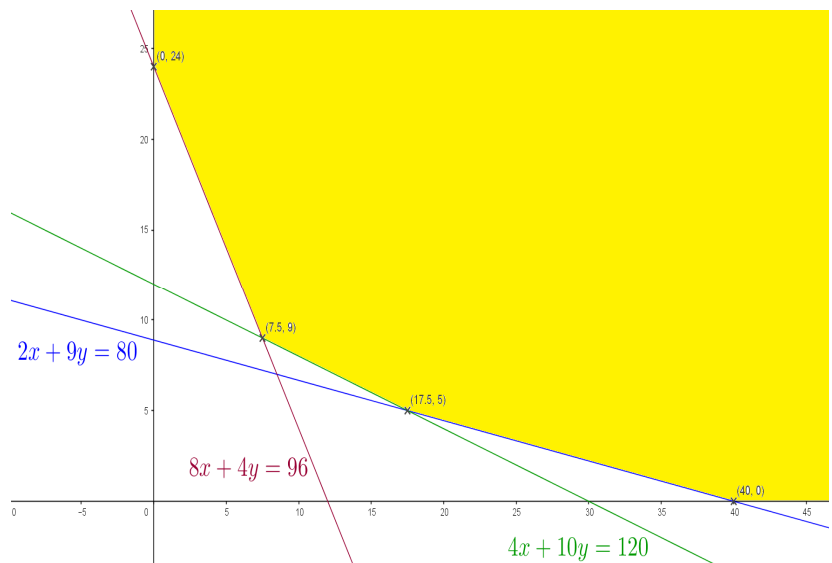
Marcando estos puntos y los cortes con los ejes coordenados obtenidos anteriormente:



*Los vértices de la región factible son:
 (0 , 24), (7.5 , 9),
 (17.5 , 5) y (40 , 0)*



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.



El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 250x + 600y$	
$0, 24$	$250 \cdot 0 + 600 \cdot 24 = 14400$	
$7'5, 9$	$250 \cdot 7'5 + 600 \cdot 9 = 7275$	<i>mínimo</i>
$17'5, 5$	$250 \cdot 17'5 + 600 \cdot 5 = 7375$	
$40, 0$	$250 \cdot 40 + 600 \cdot 0 = 10000$	

El mínimo se alcanza en el punto $(7'5, 9)$

Por tanto,

- a) **La máquina A debe trabajar 7'5 horas y la B 9 horas para que el coste total de producción sea mínimo.**
- b) **Dicho coste mínimo será de 7275€.**