

Problema 2. A. Tras un vertido químico accidental en un estanque, la concentración en partes por millón (ppm) de tóxico evoluciona durante las primeras 15 horas según la siguiente función, donde t representa el tiempo en horas:

$$C(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + a & 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{12t + 89}{t + 1} & 6 < t \leq 15 \end{cases}$$

- Halla el valor de a sabiendo que $C(t)$ es una función continua en el intervalo $[0,15]$. (0,5 puntos)
- Halla el instante en el que la concentración es máxima en el intervalo de tiempo $[0,6]$ y determina si el valor obtenido es el máximo absoluto durante las 15 horas. (1 punto)
- Justifica si la concentración ha ido reduciéndose en todo momento en el tramo $]6,15]$. (0,5 puntos)
- Se debe emitir una alerta siempre que la concentración supere las 20 ppm. Determina todos los intervalos de tiempo en los que la alerta debe estar activada. (1,5 puntos)

Solución:

a) ¿ a ? / $C(t)$ sea continua en $[0,15]$.

En el intervalo $(0,6)$, $C(t)$ es un polinomio de 2º grado luego es continua.

En el intervalo $(6,15]$, $C(t) = \frac{12t + 89}{t + 1}$ habría problemas de continuidad cuando $t + 1 = 0$; $t = -1 \notin (6,15]$, luego es continua.

Veamos la continuidad en $t = 6$.

$$a) C(6) = -6^2 + 8 \cdot 6 + a = 12 + a$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 6} C(t) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} C(t) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (-t^2 + 8t + a) = 12 + a \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} C(t) = \lim_{x \rightarrow 6^+} \left(\frac{12t + 89}{t + 1} \right) = \frac{12 \cdot 6 + 89}{6 + 1} = 23 \end{cases}$$

Para que exista el límite debe ser $12 + a = 23$; $a = 23 - 12 = 11$

Para que $C(t)$ sea continua en $t = 6$ debe ser $a = 11$.

Solución: $C(t)$ es continua en $[0, 15]$ cuando $a = 11$.

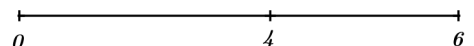
b) Halla el instante en el que la concentración es máxima en el intervalo de tiempo $[0,6]$ y determina si el valor obtenido es el máximo absoluto durante las 15 horas.

b.1) Máximo de $C(t)$ en $[0,6]$,

$$C(t) = -t^2 + 8t + a$$

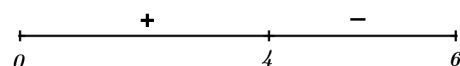
$$C'(t) = -2t + 8; \quad -2t + 8 = 0; \quad -2t = -8; \quad t = \frac{-8}{-2} = 4$$

Debemos estudiar el signo de $C'(t)$ en los siguientes intervalos:



t	$C'(t) = -2t + 8$
1	$C'(1) = -2 \cdot 1 + 8 = 6 > 0$
5	$C'(5) = -2 \cdot 5 + 8 = -2 < 0$

el signo de $C'(t)$ es:



Entonces en $t = 4$ hay un máximo relativo que es el absoluto de $C(t)$ en $[0, 6]$ por ser la función creciente a su izquierda y decreciente a su derecha.

En el intervalo $[0, 6]$ la concentración es máxima en el instante $t = 4$.

b.2) Para determinar si el valor obtenido es el máximo absoluto durante las 15 horas, estudiemos la monotonía de $C(t)$ en el intervalo $(6, 15]$,

$$C(t) = \frac{12t + 89}{t + 1}; \quad C'(t) = \frac{12(t+1) - (12t + 89) \cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{12t + 12 - 12t - 89}{(t+1)^2} = \frac{-77}{(t+1)^2}$$

En $C'(t)$ el numerador es negativo y el denominador positivo (por ser algo al cuadrado), luego $C'(t)$ es negativo y por tanto $C(t)$ es decreciente en $(6, 15)$

Como $C(t)$ es continua en $[0, 15]$, creciente en $(0, 4)$ y decreciente en $(4, 15)$ el máximo absoluto obtenido en b.1) es el máximo absoluto de $C(t)$ en $[0, 15]$.

El máximo absoluto de $C(t)$ durante la 15 horas se alcanza en el instante $t = 4$.

c) Justifica si la concentración ha ido reduciéndose en todo momento en el tramo $[6, 15]$.

Como en el apartado anterior hemos obtenido que $C(t)$ es decreciente en $(6, 15)$ deducimos que:

la concentración ha ido reduciéndose en todo momento en el tramo $[6, 15]$.

d) ¿ $t? / C(t) > 20$

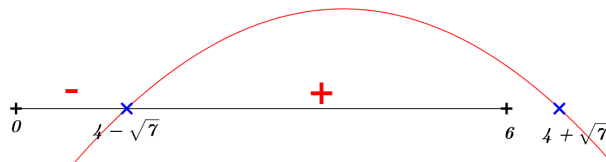
En el intervalo $[0, 6]$:

$$-t^2 + 8t + 11 > 20; \quad -t^2 + 8t - 9 > 0$$

$$-t^2 + 8t - 9 = 0; \quad t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{7}}{-2} = 4 \pm \sqrt{7} \begin{cases} t_1 = 4 + \sqrt{7} \cong 6.64 \notin [0, 6] \\ t_2 = 4 - \sqrt{7} \cong 1.35 \in [0, 6] \end{cases}$$

Como la inecuación es de 2º grado con coeficiente de t^2 negativo y raíces las obtenidas la solución

gráfica es:



Por tanto, en el intervalo $[0, 6]$ $C(t) > 20$ en $(4 - \sqrt{7}, 6]$

En el intervalo $(6, 15]$:

En este intervalo $C(t)$ es decreciente y sabemos que $C(6) = 23$. Resolvamos $C(t) = 20$:

$$\frac{12t + 89}{t + 1} = 20; \quad 12t + 89 = 20t + 20; \quad 12t - 20t = 20 - 89; \quad -8t = -69; \quad t = \frac{-69}{-8} = 8.625$$

Por tanto, en el intervalo $(6, 15]$ $C(t) > 20$ en $(6, 8.625)$

Solución: se debe emitir una alerta en el intervalo de tiempo $(4 - \sqrt{7}, 8.625)$.