

**Problema 2. B.** El valor de los activos de una empresa, en millones de euros, a los  $x$  años de su creación, viene dado por la función  $f(x)$  para  $x \in [0,5]$ . Se sabe que, en el tiempo inicial, los activos tenían un valor de cuatro millones de euros y al cabo de un año valían un millón de euros menos.

$$f(x) = A x + \frac{B}{x+1}$$

Determina:

- Los coeficientes  $A$  y  $B$  de la función. (0,25 puntos)
- El intervalo en el que el valor de los activos es mayor de 4 millones. (0,5 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. (1,5 puntos)
- El momento en que el valor fue máximo y mínimo, y el valor de estos. (0,5 puntos)
- El área entre la función  $g(x) = (x+1)f(x)$ , el eje  $OX$  y las rectas  $x=2$  y  $x=3$ . (0,75 puntos)

**Solución:**

a) ¿ $A$  y  $B$ ?

De los datos del problema:

“en el tiempo inicial, los activos tenían un valor de cuatro millones de euros”  $\rightarrow f(0) = 4$

“al cabo de un año valían un millón de euros menos”  $\rightarrow f(1) = 3$

$$f(0) = 4 \rightarrow A \cdot 0 + \frac{B}{0+1} = 4; \quad B = 4$$

$$f(1) = 3 \rightarrow A \cdot 1 + \frac{4}{1+1} = 3; \quad A + 2 = 3; \quad A = 3 - 2 = 1$$

**Solución:**  $A = 1$  y  $B = 4$ .

b) ¿Intervalo? /  $f(x) > 4$ .

$$x + \frac{4}{x+1} > 4; \quad x(x+1) + 4 > 4(x+1); \quad x^2 + x + 4 > 4x + 4; \quad x^2 + x + 4 - 4x - 4 > 0; \quad x^2 - 3x > 0$$

$$x^2 - 3x = 0; \quad x(x-3) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x-3=0; \quad x=3 \end{cases}$$

Como la inecuación es de 2º grado con coeficiente de  $x^2$  positivo y raíces las obtenidas, la solución



Por tanto, en el intervalo  $(3, 5]$   $f(x) > 4$ .

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$$f(x) = x + \frac{4}{x+1} \quad x \in [0, 5]$$

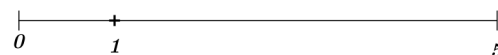
Estudiamos el signo de  $f'(x)$ ,

$$f'(x) = 1 + \frac{-4 \cdot 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0; \quad 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = 0; \quad (x+1)^2 - 4 = 0; \quad (x+1)^2 = 4; \quad x+1 = \pm\sqrt{4};$$

$$x+1 = \pm 2 \begin{cases} x+1=2; & x=1 \\ x+1=-2; & x=-3 \notin [0,5] \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de  $f'(x)$  en los siguientes intervalos:



$$x=0.5, \quad f'(0.5) = 1 - \frac{4}{(0.5+1)^2} = -\frac{7}{9} < 0$$

$$x=2, \quad f'(2) = 1 - \frac{4}{(2+1)^2} = \frac{5}{9} > 0$$

→ el signo de  $f'(x)$  será

**Luego,  $f(x)$  es decreciente en el intervalo  $(0, 1)$  y creciente en  $(1, 5)$ .**

d) El momento en que el valor fue máximo y mínimo, y el valor de estos.

De lo estudiado en el apartado c)  $f(x)$  tiene un mínimo relativo en  $x = 1$ .

Como  $f(x)$  es decreciente a la izquierda de 1 y creciente a su derecha, este mínimo es el absoluto. En el apartado a) obtuvimos que  $f(1) = 4$ .

Obtengamos los valores de  $f(x)$  en los extremos del intervalo,

Del apartado a) sabemos que  $f(0) = 4$

$$f(5) = 5 + \frac{4}{5+1} = \frac{17}{3} \cong 5.666...$$

**Finalmente, el valor máximo se alcanza al cabo de 5 años y es de  $\frac{17}{3}$  millones de euros y el mínimo se alcanza al cabo de 1 año y es de 3 millones de euros.**

e) El área entre la función  $g(x) = (x+1)f(x)$ , el eje OX y las rectas  $x=2$  y  $x=3$ .

Obtengamos la función  $g(x)$ ,

$$g(x) = (x+1)f(x) = (x+1) \left( x + \frac{4}{x+1} \right) = (x+1)x + 4 = x^2 + x + 4, \quad g(x) \text{ es un polinomio de } 2^\circ \text{ grado.}$$

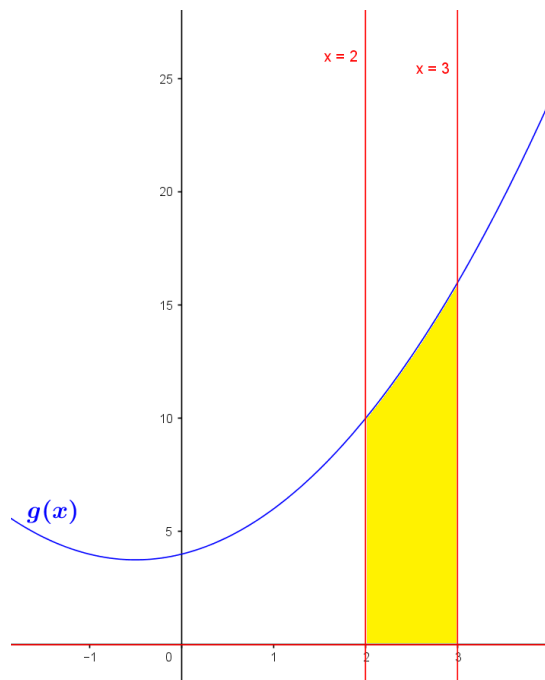
Para representarlo calculamos sus puntos de corte con los ejes coordenados y su vértice:

$$x=0, \quad g(0) = 0^2 + 0 + 4 = 4 \quad (0, 4)$$

$$g(x)=0, \quad x^2 + x + 4 = 0; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} \text{ no existe. No corta al eje OX.}$$

$$\text{Vértice, } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}; \quad g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{15}{4} = 3.75$$

*El área a calcular es:*



*Esta área la calculamos mediante la siguiente integral definida:*

$$\begin{aligned}\int_2^3 (x^2 + x + 4) dt &= \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x \right]_2^3 = \\ &= \left[ \left( \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 4 \cdot 3 \right) - \left( \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 4 \cdot 2 \right) \right] = \frac{51}{2} - \frac{38}{3} = \frac{77}{6}\end{aligned}$$

***El área pedida mide  $\frac{77}{6}$  u.a.***