Problema 1. A. Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? *(3 puntos)*

b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? *(0,5 puntos)*

Solución:

Llamando: x = *número de días que funciona la planta A*
y = *número de días que funciona la planta B*

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

	Nº días	*P1*	*P2*	*P3*	*Coste*
A	x	*1 lote/día*	*2 lote/día*	*1 lote/día*	*60000€/día*
B	y	*1 lote/día*	*1 lote/día*	*5 lote/día*	*75000€/día*
Necesidades		≥ 6	≥ 8	≥ 10	

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

La empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1 $\rightarrow$ $x + y \geq 6$.
La empresa tiene que producir al menos 8 lotes del producto P2 $\rightarrow$ $2x + y \geq 8$.
La empresa tiene que producir al menos 10 lotes del producto P3 $\rightarrow$ $x + 5y \geq 10$.

Como las variables x *e* y *representan número de días deben ser números naturales.*

El coste de producción viene dado por la función: $z = 60000x + 75000y = 1000(60x + 75y)$

El problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \quad z = 1000(60x + 75y)$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a) \quad x + y \geq 6$

$x + y = 6$

x	y
0	6
6	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \geq 6 \quad No$

$(b) \quad 2x + y \geq 8$

$2x + y = 8$

x	y
0	8
4	0

¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 0 \geq 8 \quad No$

$(c) \quad x + 5y \geq 10$

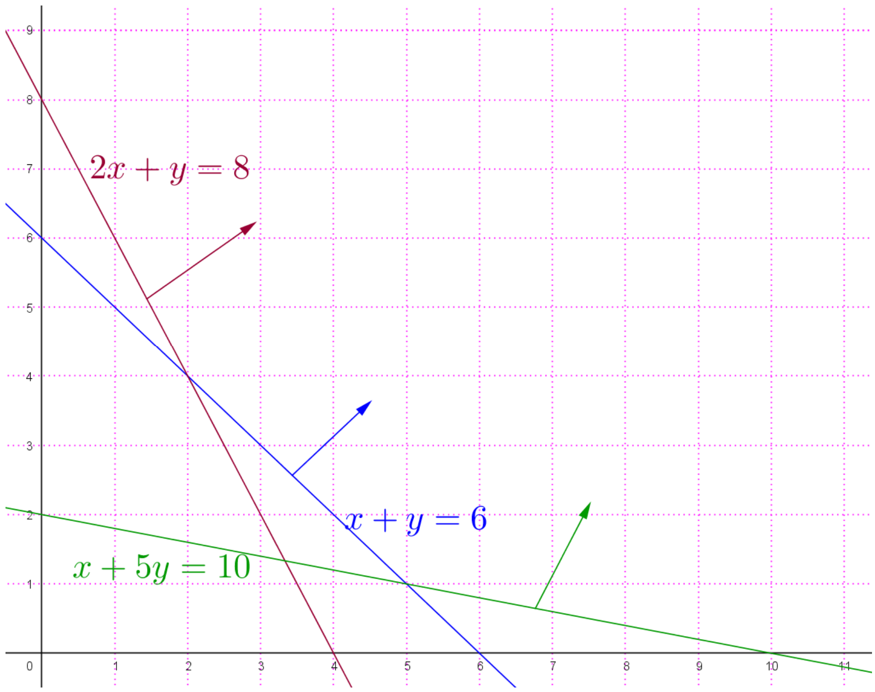
$x + 5y = 10$

x	y
0	2
10	0

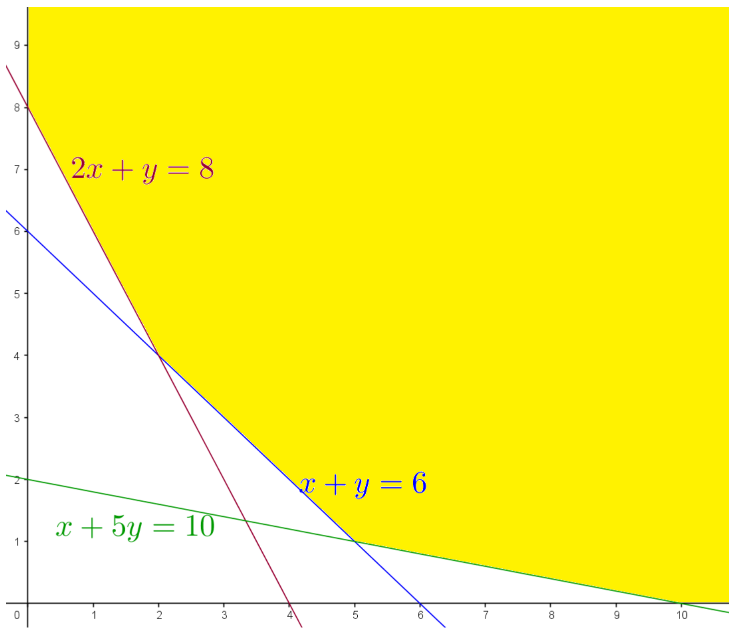
¿(0,0) cumple?

$0 + 5 \cdot 0 \geq 10 \quad No$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son A (0 , 8) y D (10 , 0).

Punto B, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -1x1^{a} \\ 2^{a} \end{matrix} \begin{cases} -x - y = -6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Sumando: $x = 2$

Sustituyendo el valor de x en la 1^{a} *ecuación:* $2 + y = 6; \quad y = 6 - 2 = 4$

Luego B (2 , 4)

Punto C, corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 5y = 10 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -1x1^{a} \\ 2^{a} \end{matrix} \begin{cases} -x - y = -6 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$$

Sumando: $4y = 4; \quad y = 4/4 = 1$

Sustituyendo el valor de x en la 1^{a} *ecuación:* $x + 1 = 6; \quad y = 6 - 1 = 5$

Luego C (5 , 1)

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 1000(60x + 75y)$	
$0, 8$	$1000(60 \cdot 0 + 75 \cdot 8) = 600.000$	
$2, 4$	$1000(60 \cdot 2 + 75 \cdot 4) = 420.000$	
$5, 1$	$1000(60 \cdot 5 + 75 \cdot 1) = 375.000$	*mínimo*
$10, 0$	$1000(60 \cdot 10 + 75 \cdot 0) = 600.000$	

El mínimo se alcanza en el punto (5 , 1)

Por tanto,

a) ***Para que el coste de producción sea mínimo la planta A debe funcionar 5 días y la B 1 día.***
b) ***El coste de producción mínimo será de 375000€.***