Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x^2}{1+x}, & si \quad 0\le x<4 \\ 2x+4, & si \quad 4\le x<8 \\ 3x+60-x^2, & si \quad 8\le x\le 9 \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo [0,9]. *(0,75 puntos)*

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo [0,9] *(1,5 puntos)*

c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuanto vale la función en esos puntos. *(0,5 puntos)*

d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje *OX*, la recta de ecuación $x = 8$, la recta de ecuación $x = 9$. *(0,75 puntos)*

Solución:

a) Continuidad de esta función en el intervalo [0,9].

En el intervalo [0,4),

$f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x}$, *el problema de continuidad estaría donde se anule el denominador,* $1+x=0$; $x=-1$. *Como* $-1\notin[0,4)$ *f(x) es continua en este intervalo.*

Las otras dos definiciones de f(x) son polinomios de 1^er^ o 2º grado, son continuas en sus correspondientes intervalos.

Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.

Continuidad en x = 4,

a) $f(4) = 2\,.\,4 + 4 = 12$

$$b)\quad \lim_{x\to 4} f(x)=\left\{\begin{aligned} &\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\frac{1+x^2}{1+x}=\frac{1+4^2}{1+4}=\frac{17}{5}\\ &\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}(2x+4)=2\cdot 4+4=12\end{aligned}\right\}\ne \text{ no existe } \lim_{x\to 4} f(x)$$

Por tanto f(x) no es continua en x =4

Continuidad en x = 8,

a) $f(8) = 3\,.\,8 + 60 - 8^2 = 20$

$$b)\quad \lim_{x\to 8} f(x)=\left\{\begin{aligned} &\lim_{x\to 8^-} f(x)=\lim_{x\to 8^-}(2x+4)=2.8+4=20\\ &\lim_{x\to 8^+} f(x)=\lim_{x\to 8^+}(3x+60-x^2)=3.8+60-8^2=20\end{aligned}\right\}=20$$

$$c)\quad f(8)=\lim_{x\to 8} f(x)$$

Por tanto f(x) es continua en x =8

Solución: f(x) es continua en [0 , 9] ~{4} y en x = 4 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Crecimiento y decrecimiento de esta función en el intervalo [0,9].

En el intervalo (0,4),

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x}$$

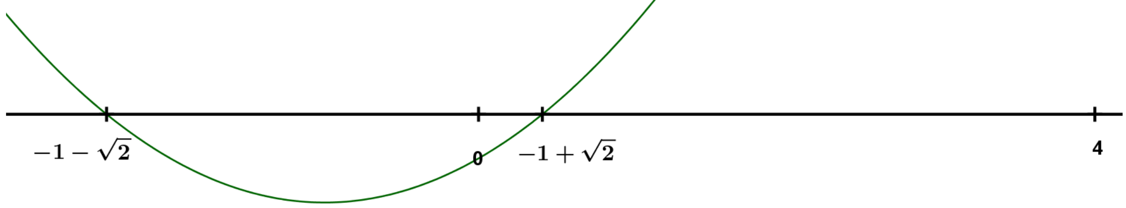
$$f'(x)=\frac{2x(1+x)-(1+x^2)1}{(1+x)^2}=\frac{2x+2x^2-1-x^2}{(1+x)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$$

Estudiemos el signo de f´(x);

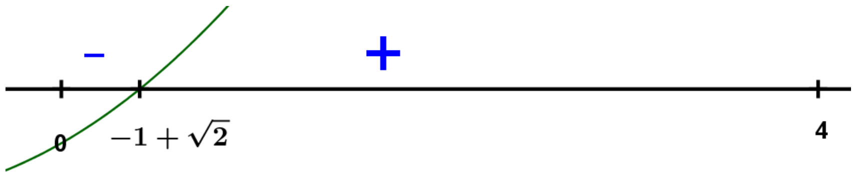
Como el denominador es una expresión al cuadrado será positivo; debemos estudiar el signo del numerador:

$$x^2+2x-1=0;\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}=\left\langle\begin{array}{l}-1+\sqrt{2}\cong 0´41\in(0,4)\\-1-\sqrt{2}\cong -2´41\notin(0,4)\end{array}\right.$$

Gráficamente (x^2+2x-1 es una parábola con coeficiente de x^2 positivo)



El signo de f´(x) será:



En el intervalo (4,8),

f(x) = 2 x + 4, polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo por tanto creciente.

En el intervalo (8,9),

f(x) = $-x^2+3x+60$

$$f'(x)=-2x+3;\quad -2x+3=0;\quad 2x=3;\quad x=\frac{3}{2}=1´5$$

Signo de f´(x):

a la izquierda de 1´5: f´(0) = – 2 .0 +3 = 3 positivo

a la derecha de 1´5: f´(3) = – 2 .3 +3 = – 3 negativo

Por tanto en el intervalo (8,9) f´(x) < 0, luego f(x) decreciente.

Finalmente, f(x) es creciente en** $\left(-1+\sqrt{2}\,,4\right)\cup(4\,,8)$ **y es decreciente en** $\left(0\,,-1+\sqrt{2}\right)\cup(8\,,9)$**.

c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuanto vale la función en esos puntos.

De la función sabemos que es continua en [0 , 9] ~{4} y que es creciente en $\left(-1+\sqrt{2}\,,4\right)\cup(4\,,8)$ y es decreciente en $\left(0\,,-1+\sqrt{2}\right)\cup(8\,,9)$.

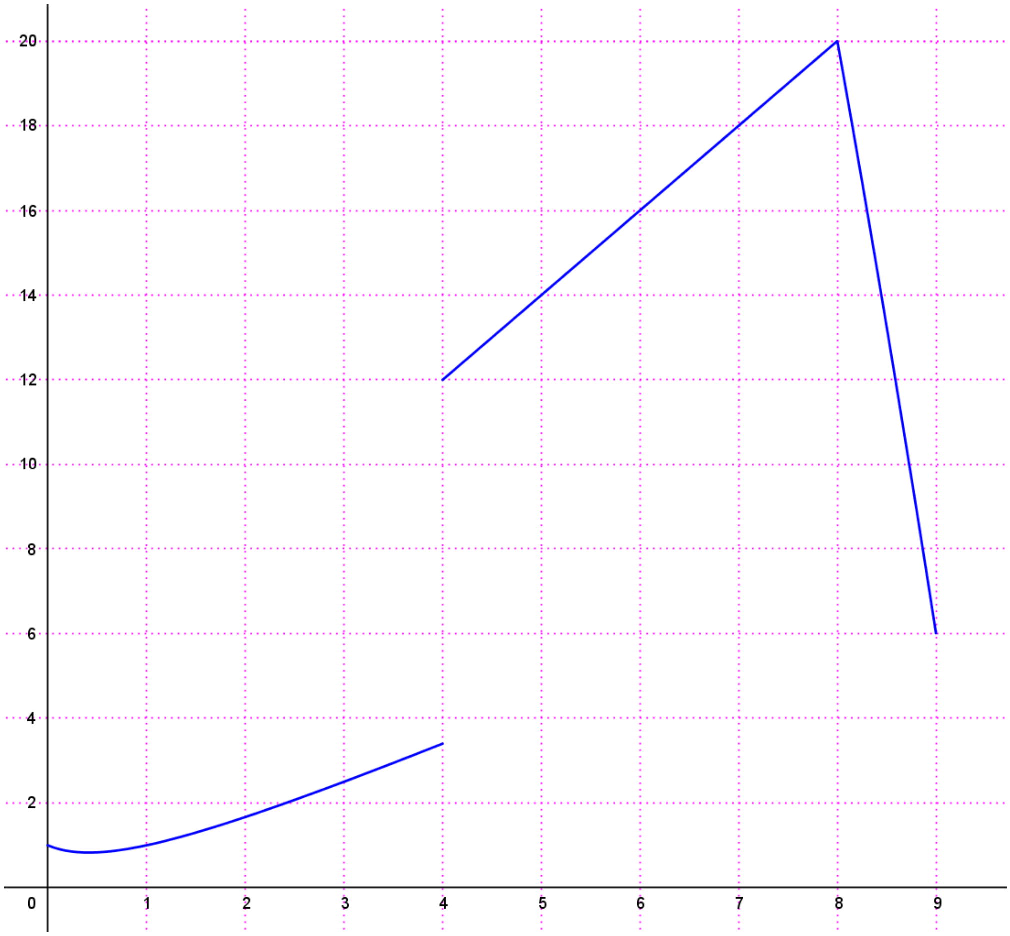
Representemos gráficamente la función

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x}\quad\left\{\begin{array}{l}f(0)=\dfrac{1+0^2}{1+0}=1\\[2ex] f(-1+\sqrt{2})=\dfrac{1+\left(-1+\sqrt{2}\right)^2}{1+\left(-1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-2+2\sqrt{2}\cong 0´8284\\[2ex] f(4)=\dfrac{1+4^2}{1+4}=\dfrac{17}{5}=3´4\end{array}\right.$$

Según vimos en el apartado anterior, a la izquierda de $-1+\sqrt{2}$ f(x) es decreciente y a su derecha creciente por tanto en $x=-1+\sqrt{2}$ f(x) tiene un mínimo local.

$$f(x) = 2x + 4 \quad \begin{cases} f(4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12 \\ f(8) = 2 \cdot 8 + 4 = 20 \end{cases}$$

$$f(x) = 3x + 60 - x^2 \quad \begin{cases} f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20 \\ f(9) = 3 \cdot 9 + 60 - 9^2 = 6 \end{cases}$$



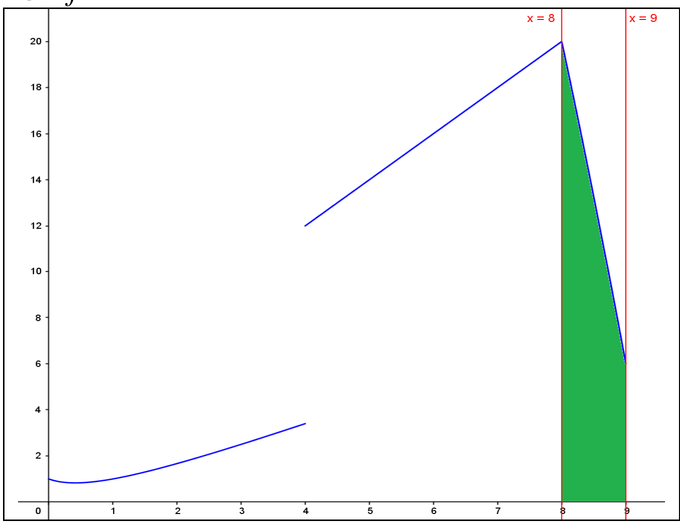
Solución: la función alcanza un mínimo en x = $-1+\sqrt{2}$ ***y*** $f\left(-1+\sqrt{2}\right) = -2 + 2\sqrt{2}$.

La función alcanza un máximo en x = 8 y f(8) = 20.

d) Área de la región delimitada por f(x), el eje OX, la recta de ecuación x = 8, la recta de ecuación x = 9.

Entre x = 8 y x = 9 la definición de f(x) es $3x + 60 - x^2$.

Gráficamente:



El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral:

$$\int_8^9 \left(3x + 60 - x^2\right)dx = \left[3\frac{x^2}{2} + 60x - \frac{x^3}{3}\right]_8^9 =$$

$$= \left(3\frac{9^2}{2} + 60 \cdot 9 - \frac{9^3}{3}\right) - \left(3\frac{8^2}{2} + 60 \cdot 8 - \frac{8^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{837}{2} - \frac{1216}{3} = \frac{79}{6} \cong 13{'}1667$$

Solución: el área de la región indicada mide $\frac{79}{6}$ ***u.a.***