**Problema 2. B.** Se considera la función:

$$f(x)=\frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}$$

Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(1 punto)*

*Solución:*
*a) Dominio,*

$$x^2-2x-8=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{2+6}{2}=4\\ \frac{2-6}{2}=-2\end{cases} \quad \rightarrow$$

$$Dom \ \ f(x)=\Re-\{-2,4\}$$

*Puntos de corte con los ejes coordenados,*

$$x=0 \quad \rightarrow \quad f(0)=\frac{4\cdot 0^2-36}{0^2-2\cdot 0-8}=\frac{-36}{-8}=\frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad \left(0,\frac{9}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}=0; \quad 4x^2-36=0; \quad 4x^2=36; \quad x^2=9; \quad x=\pm\sqrt{9}=\pm 3\begin{cases}x=-3; & (-3,0)\\ x=3; & (3,0)\end{cases}$$

***Dom f(x) = ℜ ~{– 2 , 4}  y  los puntos de corte con los ejes coordenados son: (– 3 , 0 )  y  ( 3 , 0 ).***

*b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.*

*Asíntota horizontal,*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}4=4$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}4=4$$

, *la asíntota horizontal es y = 4.*

*Asíntotas verticales.*

*Del dominio de la función deducimos que las posibles a.v. son x = – 2 y x = 4.*

$$\lim_{x\to-2}\frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{4\cdot(-2)^2-36}{(-2)^2-2\cdot(-2)-8}=\frac{-20}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=-2 \quad es\ a.v.$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{4\cdot 4^2-36}{4^2-2\cdot 4-8}=\frac{28}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=4 \quad es\ a.v.$$

***La asíntota horizontal es  y = 4  y  las asíntotas verticales  x = – 2  y  x = 4.***

*c) Monotonía.*

*Estudiemos el signo de $f'(x)$*

$$f(x)=\frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}$$

$$f'(x)=\frac{8x\cdot(x^2-2x-8)-(4x^2-36)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-8)^2}=\frac{-8x^2+8x-72}{(x^2-2x-8)^2}$$

$$\begin{array}{r} x^2-2x-8 \\ 8x \\ \hline 8x^3-16x^2-64x \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4x^2-36 \\ 2x-2 \\ \hline -8x^2 \quad +72 \\ 8x^3 \quad -72x \quad \\ \hline 8x^3-8x^2-72x+72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8x^3-16x^2-64x \\ -8x^3+8x^2+72x-72 \\ \hline -8x^2+8x-72 \end{array}$$

*Obtengamos las raíces del numerador y denominador,*

$$-8x^2+8x-72=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot(-8)\cdot(-72)}}{2\cdot(-8)}=\frac{-8\pm\sqrt{-2240}}{-16}=\text{no tiene soluciones}$$

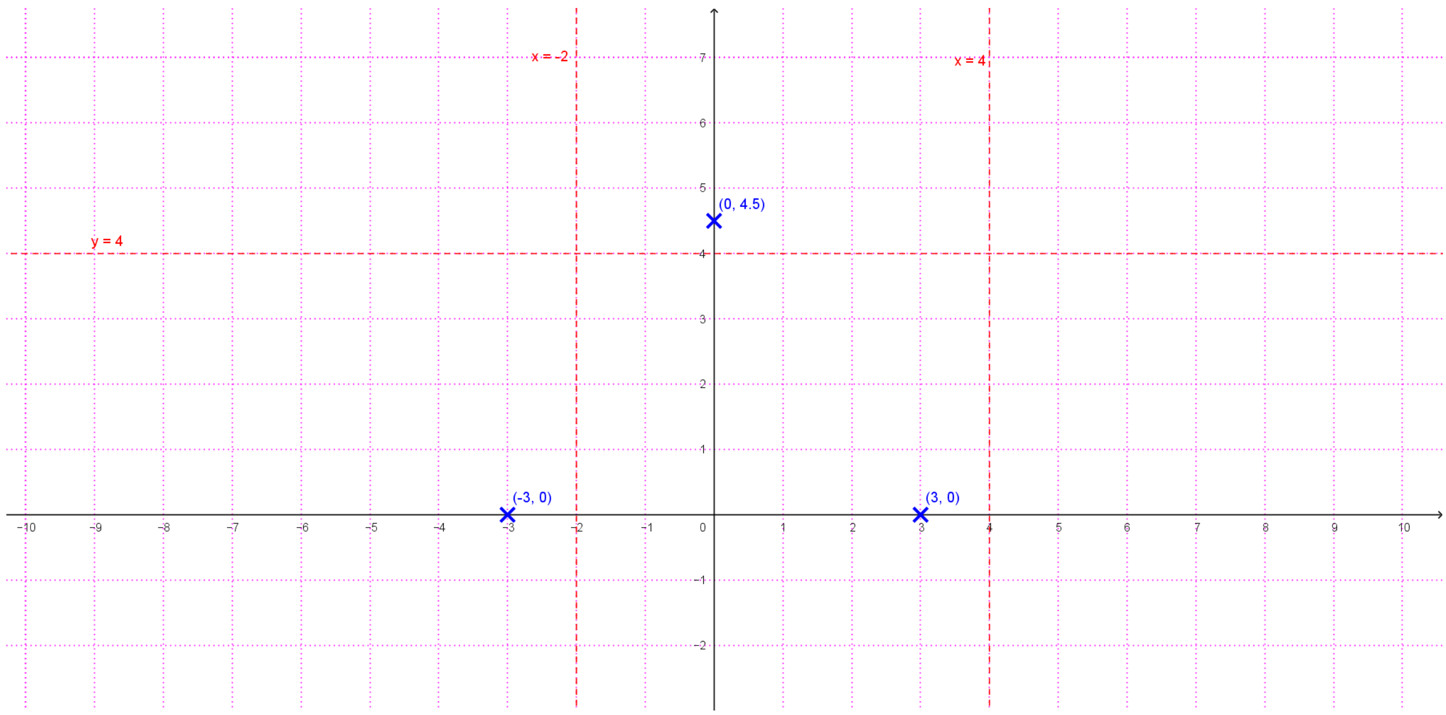
$$(x^2-2x-8)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-2x-8=0 \quad\rightarrow\quad \{\text{resuelta en } a)\} \quad x=-2 \text{ y } 4 \notin Dom\ f(x)$$

*El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de $x^2$ negativo y sin raíces, luego, $f'(x)$ es negativa.*

*Por tanto, **f(x) es decreciente en su dominio y no tiene ni máximos ni mínimos locales.***

*d) Representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.*

*Representando gráficamente lo obtenido en los apartados anteriores:*




*También sabemos que la función es decreciente en su dominio.*

*Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener otros puntos de la función.*

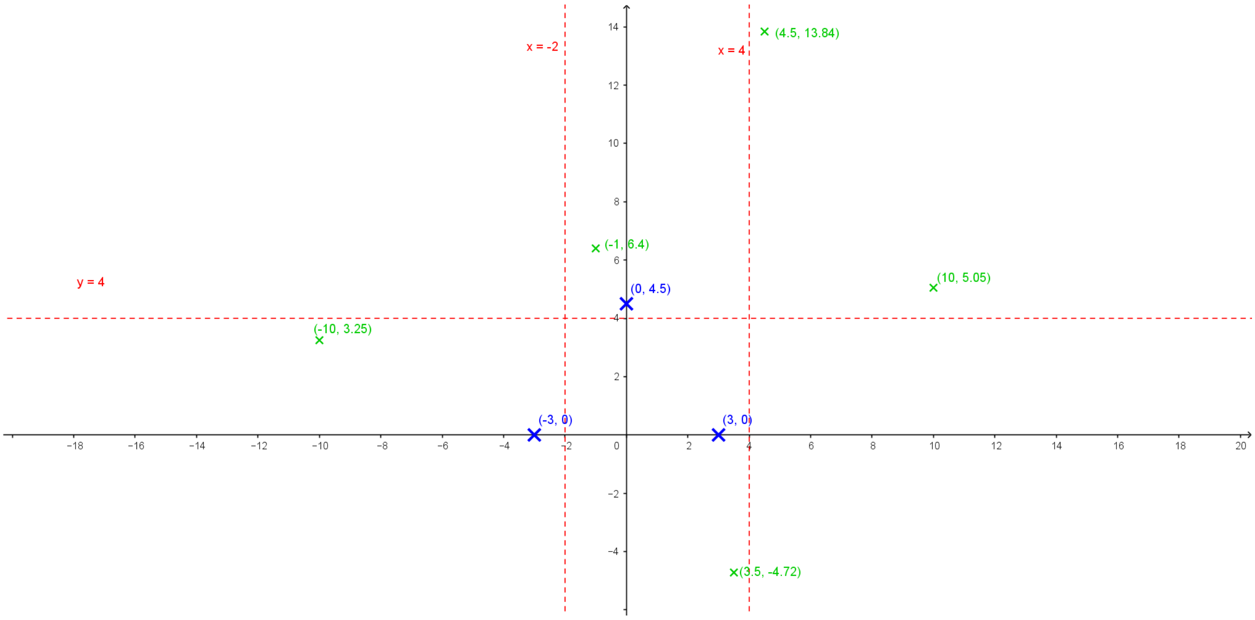
$$f(-10)=\frac{4(-10)^2-36}{(-10)^2-2(-10)-8}=\frac{13}{4}=3'25$$

$$f(4'5)=\frac{4\cdot 4'5^2-36}{4'5^2-2\cdot 4'5-8}=\frac{180}{13}\cong 13'84$$

$$f(-1)=\frac{4(-1)^2-36}{(-1)^2-2(-1)-8}=\frac{32}{5}=6'4$$

$$f(10)=\frac{4\cdot 10^2-36}{10^2-2\cdot 10-8}=\frac{91}{18}\cong 5'05$$

$$f(3'5)=\frac{4\cdot 3'5^2-36}{3'5^2-2\cdot 3'5-8}=\frac{-52}{11}\cong -4'72$$




*La representación de la función sería:*