Problema 1. A. Una empresa fabrica dos modelos de frigoríficos, *A* y *B*. Para su fabricación la empresa necesita un departamento de montaje y un departamento de pintura. Cada departamento dispone semanalmente de *100* horas. Un frigorífico del modelo *A* necesita *3* horas en el departamento de montaje y *1* hora en el de pintura, mientras que uno del modelo *B* necesita *1* hora y *2* horas, respectivamente, en cada departamento. Se pide:

a) ¿Qué cantidad de cada modelo debe producir la empresa para maximizar sus ganancias, si el beneficio por cada frigorífico del modelo *A* es de *500 euros y* por cada frigorífico del modelo *B* es de *400* euros? *(3 puntos)*

b) ¿Cuál es dicha ganancia máxima? *(0,5 puntos)*

Solución:

Llamando: x = *unidades fabricadas del modelo A*

y = *unidades fabricadas del modelo B*

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

	Nº unidades	*Montaje*	*Pintura*	*Beneficio*
A	*x*	*3 h./unidad*	*1 h./unidad*	*500€/unidad*
B	*y*	*1 h./unidad*	*2 h./unidad*	*400€/unidad*
Disponibilidad		*100 h.*	*100 h.*	

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

Por el montaje de los frigoríficos $\rightarrow 3x + y \leq 100.$

Por la pintura de los frigoríficos $\rightarrow x + 2y \leq 100.$

Como las variables x e y representan número de unidades deben ser números naturales.

El beneficio viene dada por la función: $z = 500x + 400y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 500x + 400y$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(*a*) $3x + y \leq 100$

$3x + y = 100$

x	y
0	100
100/3	0
33	1

¿(0,0) *cumple*?

$3 \cdot 0 + 0 \leq 100$ *Sí*

(*b*) $x + 2y \leq 100$

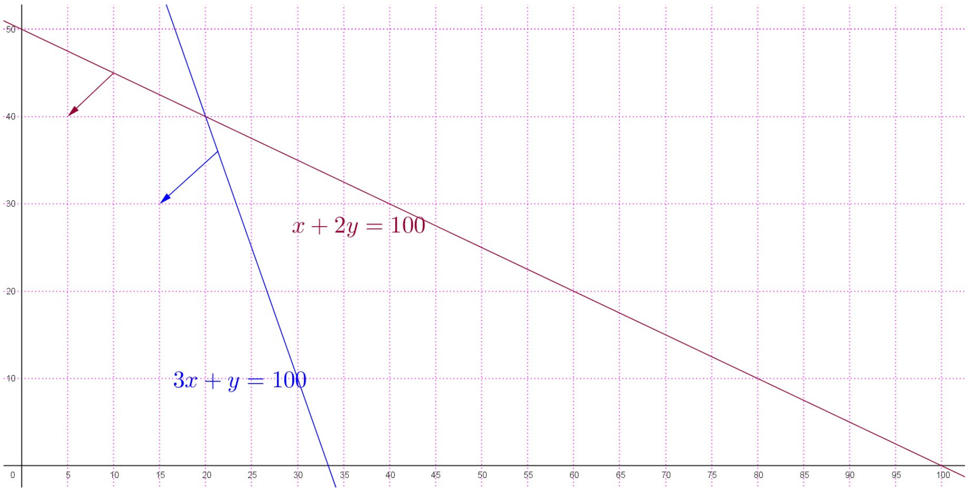
$x + 2y = 100$

x	y
0	50
100	0

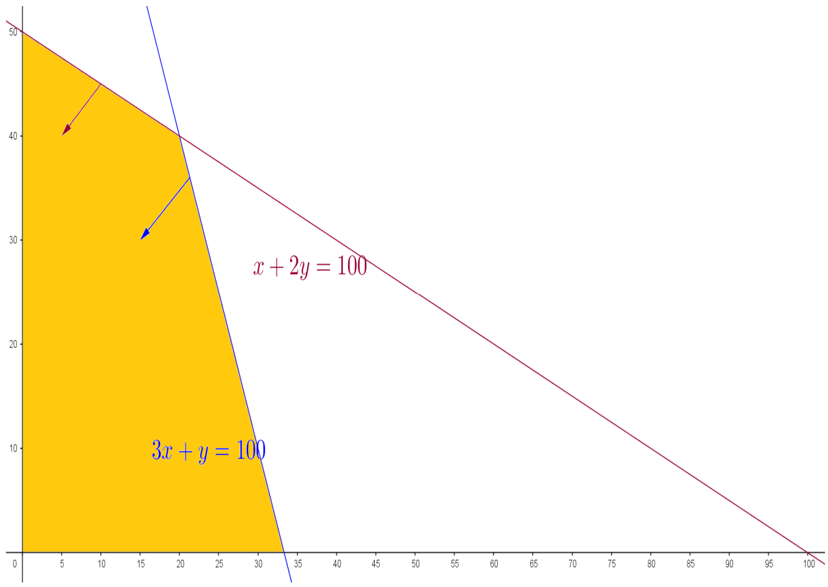
¿(0,0) *cumple*?

$0 + 2 \cdot 0 \leq 100$ *Sí*

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son A (0 , 0), B (0 , 50) y D (100/3 , 0). Pero este último no es de la región factible (100/3 $\notin$ N), tendremos que tomar el (33 , 1) y esperar que el máximo se alcance en el punto de corte de las dos rectas.

Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 3x + y = 100 \\ x + 2y = 100 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1^a \\ -3x2^a \end{matrix} \begin{cases} 3x + y = 100 \\ -3x - 6y = -300 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } -5\ y = -200 \qquad y = \frac{-200}{-5} = 40$$

Sustituyendo el valor de y en la 2^a ecuación: x + 2 . 40 = 100; x + 80 = 100; x = 100 – 80

x = 20. Luego C (20 , 40)

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	z = 500 x + 400 y	
0 , 0	500 . 0 + 400 . 0 = 0	
0 , 50	500 . 0 + 400 . 50 = 20000	
20 , 40	500 . 20 + 400 . 40 = 26000	máximo
33 , 1	500 . 33 + 400 . 1 = 16900	

El máximo se alcanza en el punto (20 , 40)

Por tanto,

a) Para maximizar sus ganancias la empresa debe producir 20 unidades del frigorífico A y 40 del B.

b) Con esta producción la ganancia máxima será de 26000€.