Problema 2. A. La temperatura, T, de un motor depende de las revoluciones, r, del mismo de forma que entre 0 y 100 revoluciones evoluciona siguiendo una tendencia lineal tal que:

$$T(r) = \frac{r}{4} + 25.$$

Sin embargo, a partir de 100 revoluciones la temperatura depende del cuadrado de las revoluciones, de forma que: $T(r) = A\, r^2 + B$, siendo A y B números reales.

Se pide:

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que la derivada de $T(r)$ en $r = 1600$ vale 4, determina A y B. *(1,5 puntos)*

b) ¿Existen máximos o mínimos para la temperatura en función de las revoluciones? Justifica la respuesta. *(1 punto)*

c) Un operario utiliza el motor durante 30 minutos de forma que en el minuto m las revoluciones que tiene el motor vienen dadas por la expresión $r(m) = 5\,m - 0'15\,m^2$. Determina en qué minutos las revoluciones son máximas y mínimas, el valor de estas y el valor de la temperatura en esos momentos. *(1 punto)*

Solución:

La definición de la función T(r) es: $T(r) = \begin{cases} \frac{r}{4} + 25 & 0 \le r \le 100 \\ A\, r^2 + B & r > 100 \end{cases} \quad A, B \in \Re$

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que la derivada de T(r) en r = 1600 vale 4, determina A y B.

T(r) debe ser continua,

En [0 , 100) T(r) es continua por ser un polinomio de 1^{er} *grado.*

En (100, $+\infty$ *) T(r) es continua por ser un polinomio de* 2^{o} *grado.*

Continuidad en r = 100,

a) $T(100) = \frac{100}{4} + 25 = 50$

b) $\lim_{r \to 100} T(r) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \to 100^-} T(r) = \lim_{r \to 100^-} \left(\frac{r}{4} + 5 \right) = \frac{100}{4} + 5 = 50 \\ \lim_{r \to 100^+} T(r) = \lim_{r \to 100^+} \left(A\, r^2 + B \right) = A\, 100^2 + B = 10000A + B \end{array} \right\}$ *existirá el límite cuando*

$10000\,A + B = 50 \quad (*)$

Por otro lado, como $T'(1600) = 4$

Como $1600 > 100$, $T'(r) = 2\,A\,r \rightarrow T'(1600) = 2\,A\,1600 = 3200\,A \rightarrow 3200\,A = 4 \rightarrow$

$A = \frac{4}{3200} = \frac{1}{800}$

Sustituyendo este valor de A en la expresión (*), $10000\frac{1}{800} + B = 50; \quad \frac{25}{2} + B = 50; \quad B = 50 - \frac{25}{2} = \frac{75}{2}$

Solución: $A = \frac{1}{800}$ *y* $B = \frac{75}{2}$.

b) ¿Existen máximos o mínimos para la temperatura en función de las revoluciones?

$$T(r) = \begin{cases} \dfrac{r}{4} + 25 & 0 \le r \le 100 \\ \dfrac{r^2}{800} + \dfrac{75}{2} & r > 100 \end{cases}$$

En [0 , 100] T(r) es un polinomio de 1^er grado con coeficiente de r positivo, luego es creciente.

En (100, $+\infty$),

$T'(r) = \dfrac{2r}{800} = \dfrac{r}{400}$, *como* $r > 100 \rightarrow T'(r) > 0$, *luego T(r) es creciente.*

Por tanto T(r) es creciente en su dominio. Por lo que no tiene máximos y tendrá un mínimo en r = 0.

$T(0) = \dfrac{0}{4} + 25 = 25$, *mínimo absoluto en (0 , 25).*

Solución: T(r) tiene un mínimo absoluto en (0 , 25) y no tiene máximos.

c) Un operario utiliza el motor durante 30 minutos de forma que en el minuto m las revoluciones que tiene el motor vienen dadas por la expresión $r(m) = 5\,m - 0{'}15\,m^2$. Determina en qué minutos las revoluciones son máximas y mínimas, el valor de estas y el valor de la temperatura en esos momentos.

$r(m) = 5\,m - 0{'}15\,m^2 \quad 0 \le r \le 30$

Calculemos máximos y mínimos de r(m).

$r'(m) = 5 - 0{'}3\,m$; $5 - 0{'}3\,m = 0$; $5 = 0{'}3\,m$; $m = \dfrac{5}{0{'}3} = \dfrac{50}{3} \cong 16{'}666... \in [0, 30]$

Obtengamos el signo de r´(m) a ambos lados de 16´666…:

m	$r'(m)$
1	$5 - 0{'}3 \cdot 1 > 0$
20	$5 - 0{'}3 \cdot 20 < 0$

Por lo que, en $m = \dfrac{50}{3}$ *r(m) tiene un **máximo relativo** que además es el absoluto porque a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.*

$$m = \frac{50}{3},\quad r\left(\frac{50}{3}\right) = 5\,\frac{50}{3} - 0{'}15\left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{125}{3} \cong 41{'}666...$$

El mínimo absoluto de r(m) estará en alguno de los extremos del intervalos de definición.

$m = 0,\quad r(0) = 5 \,.\, 0 - 0{'}15 \,.\, 0^2 = 0$

$m = 30,\quad r(30) = 5 \,.\, 30 - 0{'}15 \,.\, 30^2 = 15$

El mínimo absoluto está en (0 , 0)

Calculemos el valor de T en los valores de r obtenidos:

Para $r = \dfrac{125}{3}$, $\left(\dfrac{125}{3} < 100\right)$, $T\left(\dfrac{125}{3}\right) = \dfrac{125/3}{4} + 25 = \dfrac{425}{12} \cong 35{'}4167$

Para $r = 0$, $(0 < 100)$, $T(0) = \dfrac{0}{4} + 25 = 25$

Solución: las revoluciones son máximas en el minuto $\dfrac{50}{3}$, en este momento las revoluciones son de $\dfrac{125}{3}$ y la temperatura de $\dfrac{425}{12}$ y las revoluciones son mínimas en el minuto 0 en que las revoluciones son 0 y la temperatura 25.