Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} Ln\left(x^2+a\right) & si \quad x\le 1 \\ (x+1)^2 & si \quad 1<x\le 4 \\ 5x+\dfrac{b}{x+1} & si \quad x>4 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función y determina cuáles deben ser los valores de a y b para que sea continua en todo punto. *(0´75 puntos)*

b) Supongamos que a = 54 y que b = 25. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo [−1,5]. *(2 puntos)*

c) Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje *OX*, la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$. *(0´75 puntos)*

Solución:

a) Estudia la continuidad de la función y determina cuáles deben ser los valores de a y b para que sea continua en todo punto.

Para $x \le 1$, Ln ($x^2 + a$). $x^2 \ge 0$, para que sea continua debe ser $x^2 + a > 0$, cuando sepamos el valor de a diremos si es continua o no.

Para $1 < x \le 4$, $(x + 1)^2$ es continua por ser un polinomio.

Para $x > 4$, $5x+\dfrac{b}{x+1}$. Como $x > 4$, $x + 1 > 5$ (el denominador no se anula) luego es continua.

Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.

Continuidad en $x = 1$,

a) $f(1) = Ln (1^2 + a) = Ln (1 + a)$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left[Ln\left(x^2+a\right)\right]=Ln(1+a) \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)^2=(1+1)^2=4 \end{cases}$ *para que exista el límite Ln (1 + a) = 4;*

$1 + a = e^4$; $a = e^4 - 1 \cong 53´5982$

Este valor de a nos indica que para $x \le 1$, $x^2 + a > 0$ por tanto el primer trozo de f(x) es continuo.

Continuidad en $x = 4$,

a) $f(4) = (4 + 1)^2 = 25$

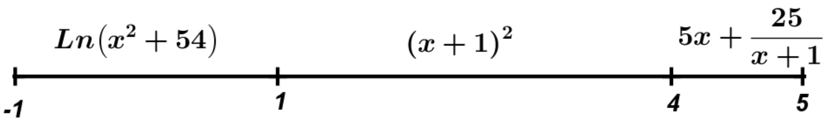
b) $\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(x+1)^2=25 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\left(5x+\dfrac{b}{x+1}\right)=5\cdot 4+\dfrac{b}{4+1}=20+\dfrac{b}{5} \end{cases}$ *para que exista el límite*

$$25=20+\frac{b}{5};\quad 5=\frac{b}{5};\quad b=25$$

Solución: f(x) es continua en $\Re$ para $a = e^4 - 1$ y $b = 25$.

b) Supongamos que a = 54 y que b = 25. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo [−1,5].

La función que debemos estudiar es:



Para determinar el máximo y mínimo absoluto, en primer lugar estudiamos su crecimiento-decrecimiento. Estudiamos el sigo de y´.

En $(-1, 1)$, $y = Ln(x^2+54)$; $y' = \dfrac{2x}{x^2+54}$, *como el denominador es siempre positivo su signo depende del numerador,* $2x > 0$; $x > 0$. *En* $(-1, 0)$ *es decreciente y en* $(0, 1)$ *es creciente.*

En $(1, 4)$, $y = (x+1)^2$; $y' = 2(x+1)$; $2(x+1) = 0$; $x + 1 = 0$; $x = -1 \notin (1, 4)$.

En $(1, 4)$ $y' > 0$, *es creciente.*

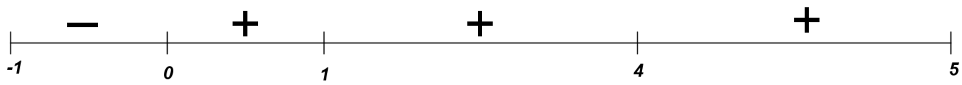
En $(4, 5)$, $y = 5x + \dfrac{25}{x+1}$; $y' = 5 + \dfrac{0 - 25\cdot 1}{(x+1)^2} = 5 - \dfrac{25}{(x+1)^2}$

$$5 - \frac{25}{(x+1)^2} = 0;\quad 5(x+1)^2 - 25 = 0;\quad 5(x+1)^2 = 25;\quad (x+1)^2 = \frac{25}{5};\quad (x+1)^2 = 5;\quad x + 1 = \pm\sqrt{5}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{5}\quad \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{5} \cong 1'23 \notin (4,5) \\ x_2 = -1 - \sqrt{5} \cong -3'24 \notin (4,5) \end{cases}$$

en $(4, 5)$ *el signo de y´ es siempre el mismo;* $y'(4'5) = 5 - \dfrac{25}{(4'5+1)^2} = 4'1736 > 0$ $\rightarrow$ *y es creciente.*

Hemos obtenido que el signo de f´(x) es:



Obtengamos los valores de f(x) en los extremos de los intervalos:

$x = -1$, $f(-1) = Ln[(-1)^2 + 54] = Ln\ 55 \cong 4'01$

$x = 0$, $f(0) = Ln[0^2 + 54] = Ln\ 54 \cong 3'99$, *en* $(0, Ln\ 54)$ *hay mínimo relativo.*

$x = 1$, $f(1) = Ln[1^2 + 54] = Ln\ 55 \cong 4'01$

El mínimo relativo será el absoluto.

$x = 1$, $f(1) = (1+1)^2 = 4$. $\qquad x = 4$, $f(4) = (4+1)^2 = 25$

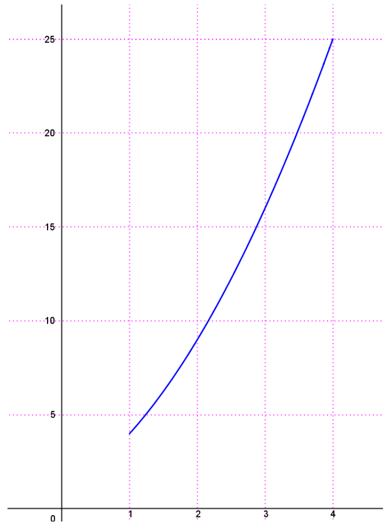
$x = 4$, $f(4) = 5\cdot 4 + \dfrac{25}{4+1} = 25$. $\qquad x = 5$, $f(5) = 5\cdot 5 + \dfrac{25}{5+1} = \dfrac{175}{6} \cong 29'16$

Solución: el mínimo absoluto es (0 , Ln 54) y el máximo absoluto es $\left(5, \dfrac{175}{6}\right)$.

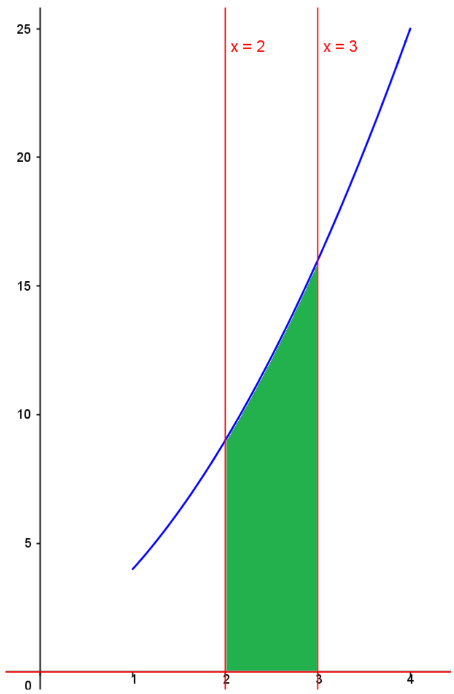
c) Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$.

Entre $x = 2$ y $x = 3$ $f(x) = (x + 1)^2$.

De lo estudiado en los apartados anteriores la representación gráfica de $f(x)$ en $(1, 4)$ sería:



El área a calcular es:



El área se calcula mediante la siguiente integral:

$$\int_2^3 (x+1)^2\,dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_2^3 = \left(\frac{(3+1)^3}{3}\right) - \left(\frac{(2+1)^2}{3}\right) =$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{27}{3} = \frac{37}{3} \cong 12´3333$$

Solución: el área pedida mide 12´3333 u.a.