Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}$$

Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos. *(2 puntos)*
d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0´5 puntos)*

Solución:

a) Dominio,

$$x^2-4=0; \quad x^2=4; \quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \quad \rightarrow \quad Dom \;\; f(x)=\Re-\{-2,2\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad \rightarrow \quad f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0+4}{0^2-4}=\frac{4}{-4}=-1 \quad \rightarrow \quad (0,-1)$$

$$f(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2-2x+4}{x^2-4}=0; \quad x^2-2x+4=0; \quad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2} \quad \text{Sin solución}$$

Dom f(x) = ℜ ~{– 2 , 2} y el punto de corte con los ejes coordenados es: (0 , – 1).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

, *la asíntota horizontal es y = 1.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que las posibles a.v. son x = – 2 y x = 2.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}=\frac{(-2)^2-2\cdot(-2)+4}{(-2)^2-4}=\frac{12}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=-2 \quad \text{es a.v.}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}=\frac{2^2-2\cdot 2+4}{2^2-4}=\frac{4}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=2 \quad \text{es a.v.}$$

La asíntota horizontal es y = 1 y las asíntotas verticales x = – 2 y x = 2.

c) Monotonía y extremos locales.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot\left(x^2-4\right)-\left(x^2-2x+4\right)\cdot(2x)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x^3-2x^2-8x+8-2x^3+4x^2-8x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x^2-16x+8}{\left(x^2-4\right)^2}$$

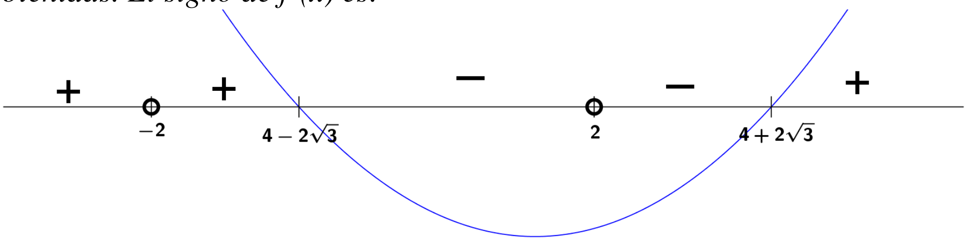
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$2x^2-16x+8=0;\quad x^2-8x+4=0;\quad x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm 4\sqrt{3}}{2}=4\pm 2\sqrt{3}$$

$$=\left\langle\begin{array}{l} x_1=4+2\sqrt{3}\cong 7'46 \\ x_2=4-2\sqrt{3}\cong 0'54\end{array}\right.$$

$$\left(x^2-4\right)^2=0;\quad x^2-4=0;\quad \{resuelta\ en\ a)\}\quad x=-2\ y\ 2\notin Dom\ f(x)$$

El denominador de $f'(x)$ *está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de* $f'(x)$ *sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *positivo y con raíces las obtenidas. El signo de* $f'(x)$ *es:*



Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $(-\infty,-2)\cup\left(-2,4-2\sqrt{3}\right)\cup\left(4+2\sqrt{3},+\infty\right)$ ***y***

decreciente en $\left(4-2\sqrt{3},2\right)\cup\left(2,4+2\sqrt{3}\right)$**.**

f(x) tiene un máximo local en x = $4-2\sqrt{3}$ ***y un mínimo local en x =*** $4+2\sqrt{3}$**.**

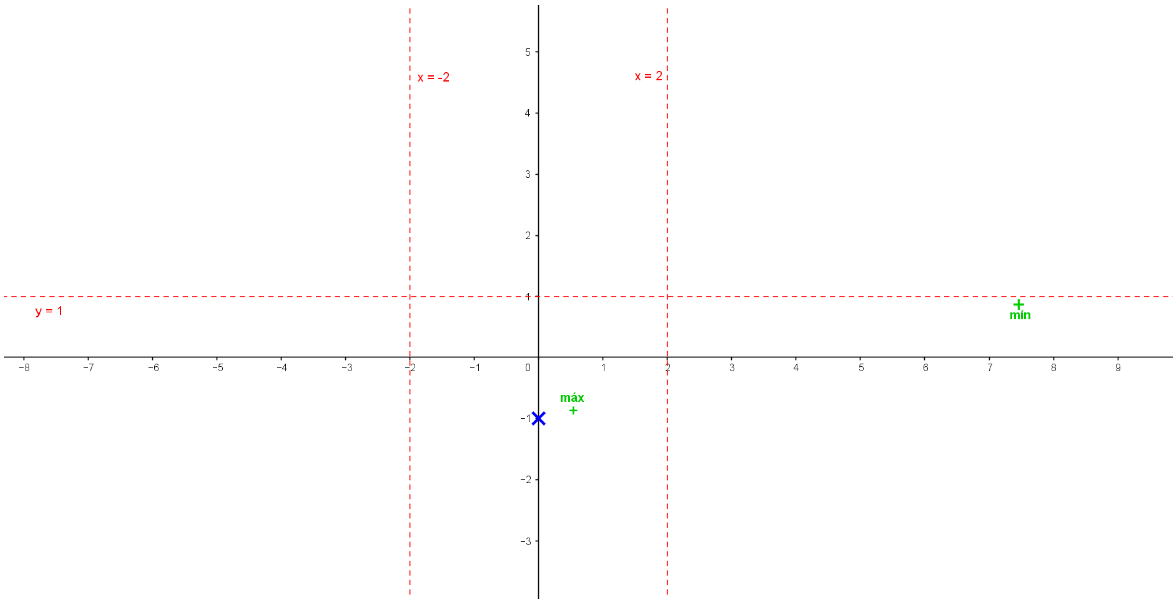
$$x=4-2\sqrt{3};\quad f\left(4-2\sqrt{3}\right)=\frac{\left(4-2\sqrt{3}\right)^2-2\left(4-2\sqrt{3}\right)+4}{\left(4-2\sqrt{3}\right)^2-4}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\cong -0'87$$

$$x=4+2\sqrt{3};\quad f\left(42\sqrt{3}\right)=\frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)^2-2\left(4+2\sqrt{3}\right)+4}{\left(42\sqrt{3}\right)^2-4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cong 0'87$$

f(x) tiene un máximo local en $\left(4-2\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\cong(0'54,-0'87)$ ***y un mínimo local en*** $\left(4+2\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cong(7'46,0'87)$**.**

d) Representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Representando gráficamente lo obtenido en los apartados anteriores:



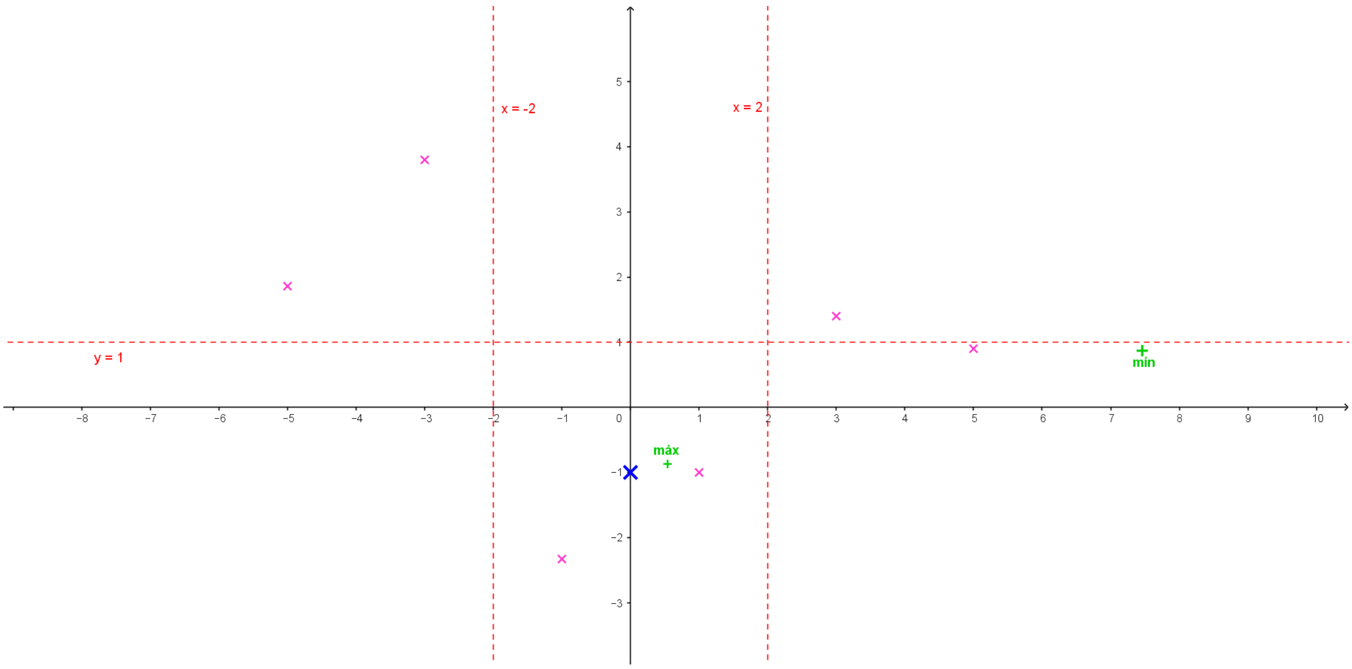
También sabemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Si con esta información la representación no nos queda definida, podemos obtener otros puntos de la función.

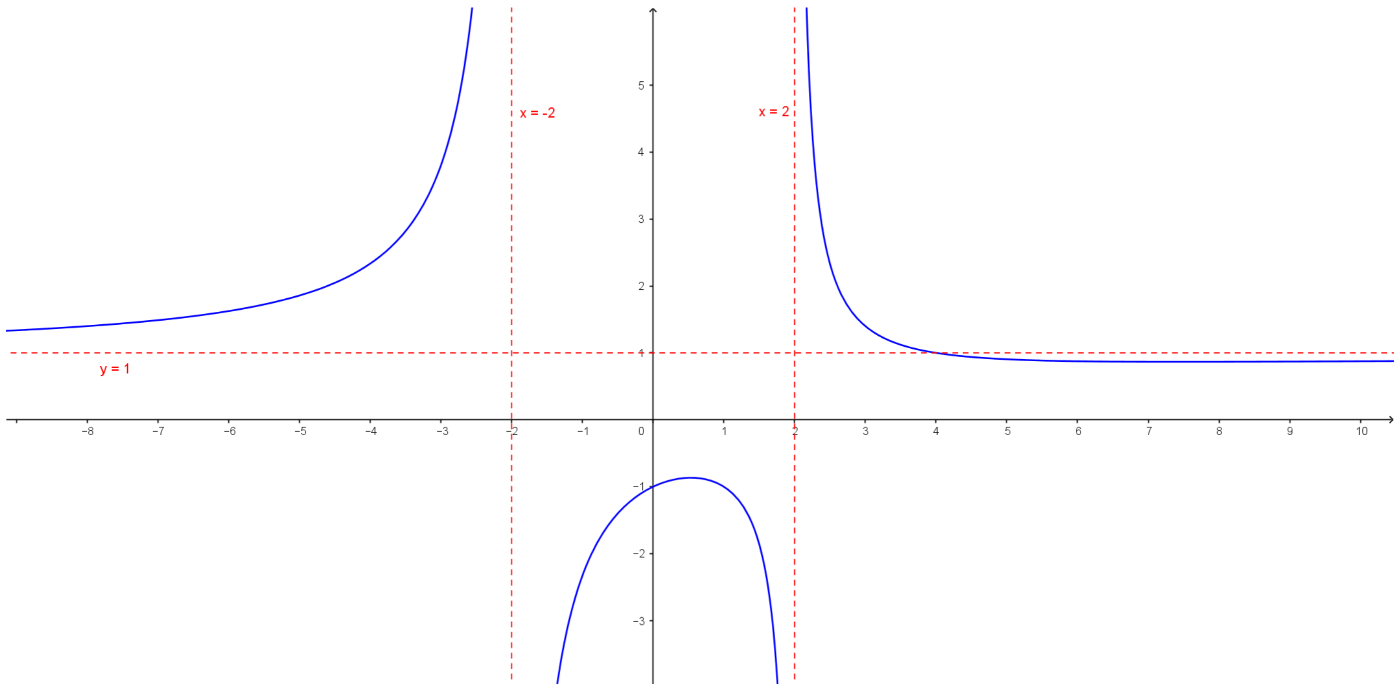
$$f(-5)=\frac{(-5)^2-2(-5)+4}{(-5)^2-4}\cong 1'86 \qquad f(-3)=\frac{(-3)^2-2(-3)+4}{(-3)^2-4}\cong 3'8$$

$$f(-1)=\frac{(-1)^2-2(-1)+4}{(-1)^2-4}\cong -2'33 \qquad f(1)=\frac{(1)^2-2(1)+4}{(1)^2-4}=-1$$

$$f(3)=\frac{(3)^2-2(3)+4}{(3)^2-4}=1'4 \qquad f(5)=\frac{(5)^2-2(5)+4}{(5)^2-4}\cong 0'90$$



La representación de la función sería:



x = -2
x = 2
y = 1
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10