Problema 3. Una empresa juguetera vende cajas con canicas. La empresa produce un 60% de canicas blancas y un 40% de canicas rojas, y cuando elabora una caja introduce al azar canicas blancas y rojas entre las producidas por la empresa.

a) Si una caja tiene 6 canicas, calcula la probabilidad de que la caja contenga el mismo número de canicas blancas que de rojas. *(0,75 puntos)*

b) Si una caja tiene 100 canicas, calcula aproximadamente la probabilidad de que la caja tenga al menos 57 canicas blancas. *(0,75 puntos)*

c) El peso (en gramos) de las canicas blancas tiene distribución normal con media 10 y varianza 0.04. Calcula la probabilidad de que el peso de una canica blanca esté comprendido entre 9,95 y 10,15 gramos. *(0,75 puntos)*

d) El peso (en gramos) de las canicas rojas tiene distribución normal con media 11 y varianza 0.09. Si una canica roja es tal que exactamente el 87,7% de las canicas rojas producidas pesan menos que ella, ¿cuánto pesa esta canica? *(0,75 puntos)*

Solución:

a) Si una caja tiene 6 canicas, calcula la probabilidad de que la caja contenga el mismo número de canicas blancas que de rojas.

Como sabemos la empresa produce un 60% de canicas blancas y un 40% de canicas rojas, y cuando elabora una caja introduce al azar canicas blancas y rojas entre las producidas por la empresa. Por lo tanto P(obtener canica blanca) = 0´6 y P(obtener canica roja) = 0´4.

Considerando la variable X = número de canicas blancas en una caja de seis canicas.

$X = B(6, 0'6) \rightarrow n = 6, \; p = 0'6 \; y \; q = 0'4$

P(la caja contenga el mismo número de canicas blancas que de rojas) = P(X = 3) = $\binom{6}{3} 0'6^3 \, 0'4^3 = 0'2765$

Solución: la probabilidad de que la caja contenga el mismo número de canicas blancas que de rojas es de 0´2765.

b) Si una caja tiene 100 canicas, calcula aproximadamente la probabilidad de que la caja tenga al menos 57 canicas blancas.

Considerando la variable X = número de canicas blancas en una caja de cien canicas.

$X = B(100, 0'6) \rightarrow n = 100, \; p = 0'6 \; y \; q = 0'4$

La probabilidad a calcular es: P(la caja tenga al menos 57 canicas blancas) = P(X ≥ 57), pero esta probabilidad no podemos obtenerla de la tabla de la binomial.

Aproximamos la variable X a una normal.

$\mu = n\,p = 100 \,.\, 0'6 = 60 \; y \; \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0'6 \cdot 0'4} = 4'8990 \rightarrow X \cong Y = N(60\,,\, 4'8990)$

Por tanto, $P(X \geq 57) = P(Y \geq 56'5) = P\left(Z \geq \frac{56'5 - 60}{4'8990}\right) = P(Z \geq -0'71) = P(Z \leq 0'71) = 0'7611$

La última probabilidad la obtenemos de la tabla de la distribución normal:

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	$\boxed{0{,}7611}$	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133

Solución: la probabilidad de que la caja contenga al menos 57 canicas blancas es de 0´7611.

c) El peso (en gramos) de las canicas blancas tiene distribución normal con media 10 y varianza 0.04. Calcula la probabilidad de que el peso de una canica blanca esté comprendido entre 9,95 y 10,15 gramos.

Consideremos la variable X = peso (en gramos) de las canicas blancas $\rightarrow$ $X = N(\mu,\sigma)$

De los datos del problema, la media es 10 $\rightarrow$ $\mu = 10$ *y la varianza es 0´04* $\rightarrow$ $\sigma = \sqrt{0´04} = 0´2$

La probabilidad pedida es $P(9´95 \leq X \leq 10´15) = P\left(\frac{9´95-10}{0´2} \leq Z \leq \frac{10´15-10}{0´2}\right) = P(-0´25 \leq Z \leq 2´5) =$

$= P(Z \leq 2´5) - P(Z \leq -0´25) = P(Z\leq 2´5) - [\ 1 - P(Z \leq 0´25)\ ] = 0´9798 - (\ 1 - 0´5987\ ) = 0´5785$

Solución: la probabilidad de que el peso de una canica blanca esté comprendido entre 9,95 y 10,15 gramos es de 0´5785.

d) El peso (en gramos) de las canicas rojas tiene distribución normal con media 11 y varianza 0.09. Si una canica roja es tal que exactamente el 87,7% de las canicas rojas producidas pesan menos que ella, ¿cuánto pesa esta canica?

Consideremos la variable X = peso (en gramos) de las canicas rojas $\rightarrow$ $X = N(\mu,\sigma)$

De los datos del problema, la media es 11 $\rightarrow$ $\mu = 11$ *y la varianza es 0´09* $\rightarrow$ $\sigma = \sqrt{0´09} = 0´3$

Sea a el peso de la canica, debe cumplirse que $P(X \leq a) = 0´877$*, normalizando:*

$P\left(Z \leq \frac{a-11}{0´3}\right) = 0´877$ *, mirando la tabla de la normal*

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

$\frac{a-11}{0´3} = 1´16 \quad \rightarrow \quad a - 11 = 1´16 \cdot 0´3$

$a = 11 + 1´16 \cdot 0´3 = 11´348$

Solución: esa canica pesa 11´348 gramos.