Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4\,X\,B + C^t\,D = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C. *(2 puntos)*

b) Una matriz A se dice que es idempotente si $A^2 = A$. Consideramos la matriz:

$$F=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}$$

Determina para qué valores de z la matriz $F\,C$ es idempotente. *(0,5 puntos)*

Solución:

a) $¿X?\;/\;4\,X\,B + C^t\,D = I$

Despejemos X: $4\,X\,B = I - C^t\,D;\quad X\,B = \frac{1}{4}\left(I - C^tD\right);$ *multiplicando por* B^{-1} *por la derecha (si existe)*

$$X\,B\,B^{-1} = \frac{1}{4}\left(I - C^tD\right)B^{-1};\quad X = \frac{1}{4}\left(I - C^tD\right)B^{-1}$$

Veamos si existe B^{-1} *:*

$$|B| = \begin{vmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 \neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\, B^{-1}$$

Cálculo de B^{-1} *:*

$$B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{menores}}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{adjuntos}}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{traspuesta}}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$C^t\,D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 1\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 3\\ 0\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 0\cdot 1 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$I - C^t\,D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}\left(I - C^t\,D\right)B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix}-1\cdot 3 - 2\cdot 2 & -1\cdot 1 - 2\cdot 4\\ 2\cdot 3 + 1\cdot 2 & 2\cdot 1 + 1\cdot 4\end{pmatrix} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix}-7 & -9\\ 8 & 6\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-7/40 & -9/40\\ 8/40 & 6/40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7/40 & -9/40\\ 1/5 & 3/20\end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix}-7/40 & -9/40\\ 1/5 & 3/20\end{pmatrix}$.

b) $¿z?\;/\;F\,C$ *es idempotente.*

$$F\,C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F\,C)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F\,C)^2 = F\,C \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1+z=1 \\ z^2 = z \\ 1=1 \;\; identidad \\ 0=0 \;\; identidad \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1+z=1 \\ z^2 = z \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $z = 0$,

de la 2ª ecuación: $z\,(\,z-1\,) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} z=0 \\ z-1=0; \quad z=1 \end{array} \right.$

La solución común de las dos ecuaciones es $z = 0$ *que es la solución del sistema.*

Solución: la matriz $\boldsymbol{F\,C}$ ***es idempotente para*** $\boldsymbol{z = 0}$.