Problema 1. B. Una granja desea crear una mezcla fertilizante líquida utilizando dos compuestos comerciales, NutriMax y BioGrow. Cada litro de estos compuestos aporta diferentes cantidades de unidades de nitrógeno, fósforo y potasio. Para que el cultivo sea productivo, los agrónomos han determinado que se deben aplicar al terreno como mínimo 8 unidades de nitrógeno, 6 unidades de fósforo y 10 unidades de potasio. Se sabe que un litro de NutriMax contiene 2 unidades de nitrógeno, 1 unidad de fósforo y 1 unidad de potasio, mientras que un litro de BioGrow contiene 1 unidad de nitrógeno, 1 unidad de fósforo y 2 unidades de potasio. El coste de un litro de NutriMax es de 5 euros y el de BioGrow es de 4 euros.

a) ¿Cuántos litros de cada producto han de utilizarse para que el coste de la mezcla sea mínimo? *(3 puntos)*

b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? *(0,5 puntos)*

Solución:

Llamando: x = *litros de NutriMax*

y = *litros de BioGrow*

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

		unidades/l			
	litros	*Nitrógeno*	*Fósforo*	*Potasio*	*Coste*
NutriMax	x	2	1	1	5€/ litro
BioGrow	y	1	1	2	4€/ litro
Necesidades mínimas		8	6	10	

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

los agrónomos han determinado que se deben aplicar al terreno como mínimo:

8 unidades de nitrógeno $\rightarrow 2x + y \geq 8$

6 unidades de fósforo $\rightarrow x + y \geq 6$

10 unidades de potasio $\rightarrow x + 2y \geq 10$

Como las variables x *e* y *representan litros* $x, y \geq 0$.

El coste viene dado por la función: $z = 5x + 4y$

El problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \quad z = 5x + 4y$$

$$s.a. \quad \begin{cases} 2x + y \geq 8 \\ x + y \geq 6 \\ x + 2y \geq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a) \quad 2x + y \geq 8$

$2x + y = 8$

x	y
0	8
4	0

¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 0 \geq 8$ No

$(b) \quad x + y \geq 6$

$x + y = 6$

x	y
0	6
6	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \geq 8$ No

$(c) \quad x + 2y \geq 10$

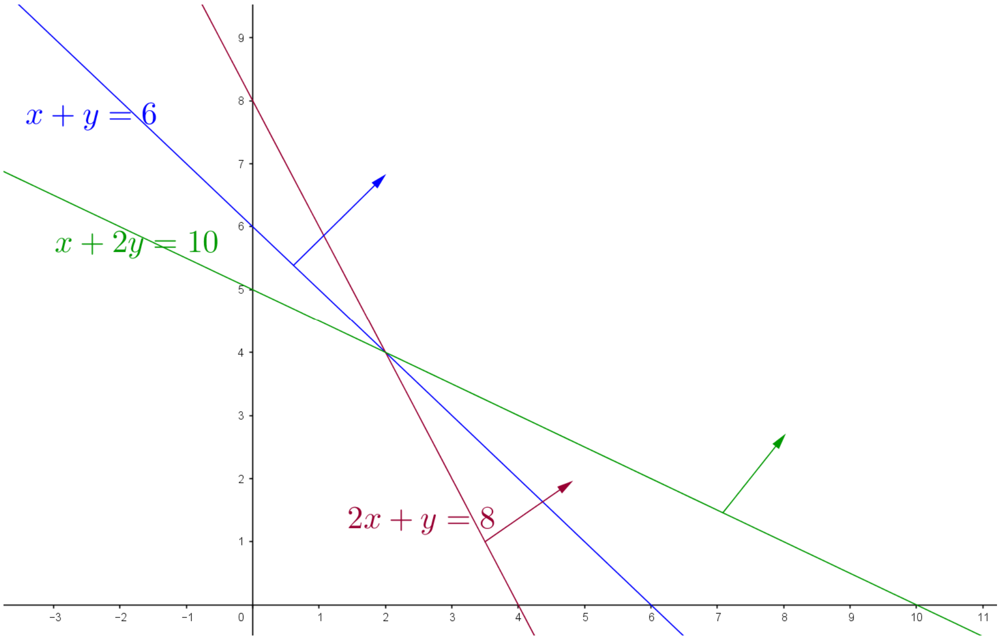
$x + 2y = 10$

x	y
0	5
10	0

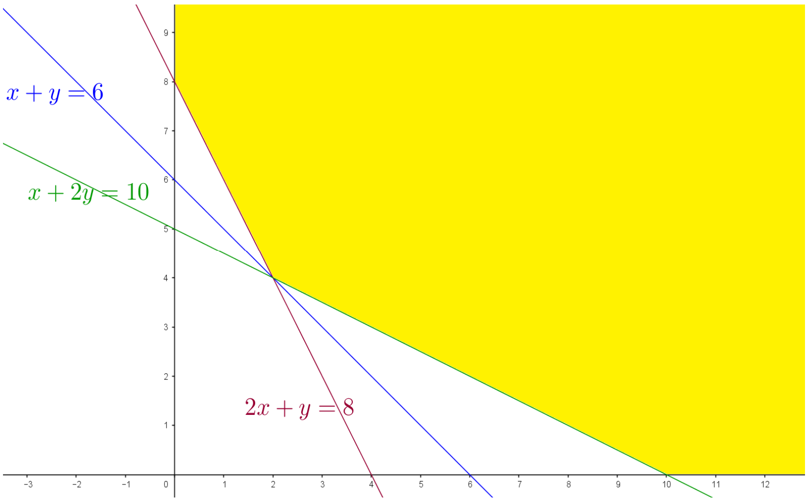
¿(0,0) cumple?

$0 + 2 \cdot 0 \geq 10$ No

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son A (0 , 8) y C (10 , 0).

Punto B, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1^a \\ 1x\ 2^a \end{matrix} \begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x - y = -6 \end{cases}$$

Sumando: x = 2

Sustituyendo el valor de x en la 2^a ecuación: 2 + y = 6; y = 6 – 2; y = 4 → B (2 , 4)

Comprobemos que este punto B también es de la recta (c): (x + 2 y = 10) 2 + 2 . 4 = 10 Sí

Por tanto, los vértices de la región factible son A (0 , 8), B (2 , 4) y C (10 , 0).

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*z = 5 x + 4 y*	
0 , 8	*5 . 0 + 4 . 8 = 32*	
2 , 4	*5 . 2 + 4 . 4 = 26*	*mínimo*
10 , 0	*5 . 10 + 4 . 0 = 50*	

El mínimo se alcanza en el punto (2 , 4)

Por tanto,

a) ***Han de utilizarse 2 litros de NutriMax y 4 de BioGrow para que el coste de la mezcla se mínimo.***
b) ***Dicho coste mínimo será de 26€.***