Problema 2. A. El valor de mercado de una empresa (en millones de euros) depende del tiempo *t* (en años) y viene dado por la función:

$$g(t)=\begin{cases} t^2+2, & si \quad 0\le t\le 1 \\ \dfrac{a}{t}+2, & si \quad 1<t\le 2 \\ c\,t+\dfrac{b}{t^2}, & si \quad 2<t\le 4 \end{cases}$$

Se pide:

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3)=23/27$, determina *a*, *b* y *c*. *(1 punto)*

b) La empresa ha tenido tres gerentes, el primero cuando $t\in[0,1]$, el segundo cuando $t\in(1,2]$ y el tercero cuando $t\in(2,4]$. Determina si con todos los gerentes el valor de mercado ha ido creciendo. *(1 punto)*

c) Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos para el valor de mercado. *(0´5 puntos)*

d) El salario de un gerente al año es cien mil veces la integral de la función *g* durante el período que ha estado. Calcula el salario del primer gerente. *(1 punto)*

Solución:

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que g´(3)=23/27, determina a, b y c.

$t^2+2 \quad 0\le t\le 1$ *es continua por ser un polinomio.*

$\dfrac{a}{t}+2 \quad 1<t\le 2$ *es continua ya que* $t\ne 0$

$ct+\dfrac{b}{t^2} \quad 2<t\le 4$ *es continua ya que* $t\ne 0$

Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.

Continuidad en t = 1,

a) $g(1) = 1^2 + 2 = 3$

b) $\lim\limits_{t\to 1} g(t)=\begin{cases} \lim\limits_{t\to 1^-} g(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}\left(t^2+2\right)=1^2+2=3 \\ \lim\limits_{t\to 1^+} g(t)=\lim\limits_{t\to 1^+}\left(\dfrac{a}{t}+2\right)=\dfrac{a}{1}+2=a+2 \end{cases}$ *para que exista el límite* $3 = a + 2;\quad a = 1$

Continuidad en t = 2,

a) $g(2) = \dfrac{a}{2}+2$

b) $\lim\limits_{t\to 2} g(t)=\begin{cases} \lim\limits_{t\to 2^-} g(t)=\lim\limits_{t\to 2^-}\left(\dfrac{a}{t}+2\right)=\dfrac{a}{2}+2 \\ \lim\limits_{t\to 2^+} g(t)=\lim\limits_{t\to 2^+}\left(ct+\dfrac{b}{t^2}\right)=c\cdot 2+\dfrac{b}{2^2}=2c+\dfrac{b}{4} \end{cases}$ *para que exista el límite*

$\dfrac{a}{2}+2=2c+\dfrac{b}{4};\quad 2a+8=8c+b$ *(como a = 1)* $2.1 + 8 = 8c + b;\quad 10 = 8c + b.$

Como g´(3)=23/27

En un entorno de $t = 3$, $g(t) = ct + \dfrac{b}{t^2} \quad \rightarrow \quad g´(t) = c + \dfrac{-b\,2t}{\left(t^2\right)^2} = c - \dfrac{2b}{t^3}$

$$g´(3) = c - \frac{2b}{3^3} = c - \frac{2b}{27} \quad \rightarrow \quad c - \frac{2b}{27} = \frac{23}{27}; \quad 27c - 2b = 23$$

Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} 8c + b = 10 \\ 27c - 2b = 23 \end{cases} \qquad 2x1^{a} \begin{cases} 16c + 2b = 20 \\ 27c - 2b = 23 \end{cases}$$

$$sumando: \quad 43c = 43; \quad c = \frac{43}{43} = 1$$

Sustiyuyendo este valor de c en la 1ª ecuación: 8 . 1 + b = 10; b = 10 – 8 = 2

Solución: a = 1, b = 2 y c = 1.

b) *La empresa ha tenido tres gerentes, el primero cuando t∈[0,1], el segundo cuando t∈ (1,2] y el tercero cuando t∈ (2,4]. Determina si con todos los gerentes el valor de mercado ha ido creciendo.*

Veamos el crecimiento-decrecimiento de g(t)

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & si \quad 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{1}{t} + 2, & si \quad 1 < t \le 2 \\ t + \dfrac{2}{t^2}, & si \quad 2 < t \le 4 \end{cases}$$

En (0 , 1), $g(t) = t^2 + 2$; $g´(t) = 2t$, *como* $t \in (0, 1)$ $2t > 0$, *g(t) creciente.*

En (1 , 2), $g(t) = \dfrac{1}{t} + 2; \quad g´(t) = \dfrac{-1}{t^2}, \quad t \in (1{,}2) \rightarrow t^2 > 0 \quad \rightarrow g´(t) < 0$, *g(t) decreciente.*

En (2 , 4), $g(t) = t + \dfrac{2}{t^2}; \quad g´(t) = 1 - \dfrac{4}{t^3} = \dfrac{t^3 - 4}{t^3}, \quad t \in (2{,}4) \rightarrow t^3 > 0,$

$t^3 - 4 > 0, \quad t^3 - 4 = 0; \quad t^3 = 4; \quad t = \sqrt[3]{4} \cong 1´587$, $1´587 < 2$ *por lo que debemos estudiar el signo de g´(t) en (2 , 4);* $g´(3) = 1 - \dfrac{4}{3^3} = 0´851 > 0 \quad \rightarrow$ *g(t) es creciente.*

Solución: el valor de mercado de la empresa creció con el primer y tercer gerentes y decreció con el segundo gerente.

c) Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos para el valor de mercado.

Responderemos a partir de su representación gráfica.

1^er tramo

t	$g(t)$
0	$0^2+2=2$
1	$1^2+2=3$

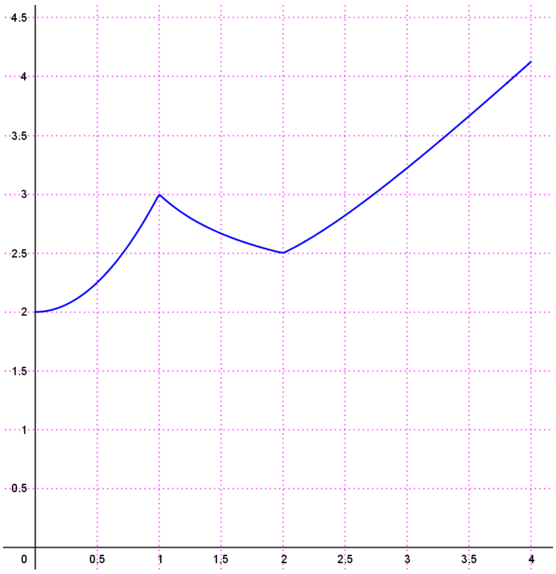
2^er tramo

t	$g(t)$
1	$\frac{1}{1}+2=3$
2	$\frac{1}{2}+2=2{\acute{}}5$

3^er tramo

t	$g(t)$
2	$2+\frac{2}{2^2}=2{\acute{}}5$
4	$4+\frac{2}{4^2}=4{\acute{}}125$

Considerando el estudio de crecimiento-decrecimiento del apartado anterior. La gráfica será:



A partir de la gráfica g(t) tiene un mínimo absoluto en (0 , 2), un máximo absoluto en (4 , 4´125), un máximo relativo en (1 , 3) y un mínimo relativo en (2 , 2´5).

d) El salario de un gerente al año es cien mil veces la integral de la función g durante el período que ha estado. Calcula el salario del primer gerente.

El primer gerente estuvo en el período [0 , 2]. Su salario lo obtendremos a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_0^1 (t^2+2)dt = \left[\frac{t^3}{3}+2t\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}+2\cdot 1\right)-(0) = \frac{1}{3}+2 = \frac{7}{3}$$

Su salario será: $100000\,\frac{7}{3} = 233333{\acute{}}333...$

Solución: el salario del primer gerente será de 233 333´33€.