Problema 2. B. Cierta empresa tecnológica ofrece servicio de almacenamiento de datos en la nube. Sus ingresos *I* (en unidades monetarias) dependen de la cantidad de datos almacenados *x* (en terabytes), siendo $I(x)=400\,x$, y su función de gastos *G* (en unidades monetarias) depende también de la cantidad de datos almacenados *x* (en terabytes), siendo $G(x)= 4\,x^2+100$.

a) Calcula la cantidad de datos que maximiza el beneficio (ingresos menos gastos), e indica cuál es el beneficio máximo que puede obtener la empresa. *(1 punto)*

b) El ratio ingresos/gastos mide la eficiencia financiera de la empresa. Calcula la cantidad de datos para los cuales la eficiencia financiera de la empresa es máxima, e indica cuál es esa eficiencia máxima. *(1´5 puntos)*

c) Calcula. $\int_0^2 G(x)^2\,dx$ *(1 punto)*

Solución:

Llamando B(x) al beneficio proporcionado por x unidades,

$B(x) = I(x) - G(x) = 400\,x - 4\,x^2 - 100$

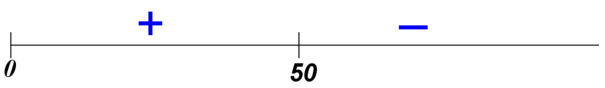
Como x es datos en terabytes, entonces $\text{Dom } B(x) = [\,0, +\infty\,)$

a) ¿x? / maximiza el beneficio B(x).

Estudiemos la monotonía de B(x),

$B´(x) = 400 - 8\,x$

$400 - 8\,x = 0;\quad 8\,x = 400;\quad x = \frac{400}{8} = 50,$ *debemos estudiar el signo de B´(x) en los intervalos:*



x	$B´(x)$
10	$400-8\cdot 10=320>0$
60	$400-8\cdot 60=-80<0$

En x = 50 hay un máximo relativo que, además, es el absoluto de B(x) ya que la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha.

Solución: la cantidad de datos que maximiza el beneficio de la empresa son 50 terabytes.

b) El ratio ingresos/gastos mide la eficiencia financiera de la empresa. Calcula la cantidad de datos para los cuales la eficiencia financiera de la empresa es máxima, e indica cuál es esa eficiencia máxima.

Llamando E(x) a la eficiencia financiera, $E(x)=\frac{I(x)}{G(x)}=\frac{400x}{4x^2+100}$

Máximo de E(x). Estudiemos el signo de E´(x):

$$E(x)=\frac{400x}{4x^2+100}\quad\rightarrow$$

$$E´(x)=\frac{400\left(4x^2+100\right)-400x\cdot 8x}{\left(4x^2+100\right)^2}=\frac{1600x^2+40000-3200x^2}{\left(4x^2+100\right)^2}=\frac{-1600x^2+40000}{\left(4x^2+100\right)^2}$$

$$E´(x)=0;\quad \frac{-1600x^2+40000}{\left(4x^2+100\right)^2};\quad -1600x^2+40000=0;\quad 1600x^2=40000;\quad x^2=\frac{40000}{1600};\quad x^2=25$$

$$(como\ x>0)\quad x=\sqrt{25}=5$$

Hay que estudiar el signo de $E'(x)$ en los intervalos: $(0, 5)$ y $(5, +\infty)$

x	$E'(x)$
1	$\dfrac{-1600\cdot 1^2+40000}{\left(4\cdot 1^2+100\right)^2}=\dfrac{600}{169}>0$
6	$\dfrac{-1600\cdot 6^2+40000}{\left(4\cdot 6^2+100\right)^2}=\dfrac{-1100}{3721}<0$

Luego, en $x = 5$ hay un máximo relativo que es el absoluto de $E(x)$ ya que la función a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.

Para $x = 5$, $E(5)=\dfrac{400\cdot 5}{4\cdot 5^2+100}=10$.

Solución: la eficiencia financiera es máxima para 5 terabytes y es de 10.

c)

$$\int_0^2 [G(x)]^2\,dx=\int_0^2\left[4x^2+100\right]^2 dx=\int_0^2\left[16x^4+800x^2+10000\right]dx=\left[\frac{16x^5}{5}+\frac{800x^3}{3}+10000x\right]_0^2=$$

$$=\left(\frac{16\cdot 2^5}{5}+\frac{800\cdot 2^3}{3}+10000\cdot 2\right)-(0)=\frac{333536}{15}=22235'7333$$

Solución: $\displaystyle\int_0^2 [G(x)]^2\,dx=22\,235'7333.$