

2.1 Se considera la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real m , y las matrices

$$E = (1 \ 4 \ 3) \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

2.1.1 (0.5 puntos) Indicar, si existen, los valores del parámetro m para los que D tiene inversa.

2.1.2 (1 punto) Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

2.1.3 (1 punto) Resolver, para $m = 0$, la ecuación matricial con incógnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

Solución:

2.1.1 ¿ $m? / \exists D^{-1}$.

$$\exists D^{-1} \quad \text{si} \quad |D| \neq 0.$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 1$$

$$-m^2 - 1 = 0; \quad m^2 = -1; \quad m = \pm\sqrt{-1} \text{ no tiene soluciones reales}$$

Por lo tanto, **la matriz D tiene inversa para cualquier valor de m .**

2.1.2 Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

E es una matriz 1×3 y F es 3×1 , luego existe EF que será 1×1 .

$$EF = (1 \ 4 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)) = (6)$$

F es una matriz 3×1 y E es 1×3 , luego existe FE que será 3×3 y también existirá $(FE)^t$.

$$FE = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 4 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow (FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } EF = (6) \quad \text{y} \quad (FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Resolver, para $m = 0$, $\frac{1}{2}X + D = D^{-1}$.

Para $m = 0$, en el apartado 2.1.1, hemos obtenido que existe D^{-1} .

Despejemos X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}; \quad \frac{1}{2}X = D^{-1} - D; \quad X = 2(D^{-1} - D)$$

Cálculo de D^{-1} :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |D| = (-m^2 - 1)_{m=0} = -1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Finalmente } D^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } X = 2 \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$