2.2 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

2.2.1 **(1.25 puntos)** Estudiar el rengo de la matriz A en función del parámetro real *m*.

2.2.2 **(1.25 puntos)** Para $m = 0$, calcular la matriz inversa de $\frac{1}{6}A$, si existe.

Solución:

2.2.1 Rango de A en función de m.

A es 3x3 por tanto el máximo rango de A es 3.

En A el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2$

Estudiemos el menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - m(m-1) - (m+1)(m-1) = 5 - m^2 + m - m^2 + 1 = -2m^2 + m + 6$$

$$-2m^2 + m + 6 = 0; \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 6}}{2\cdot(-2)} = \frac{-1 \pm 7}{-4} = \begin{cases} m_1 = \dfrac{-1+7}{-4} = \dfrac{-3}{2} \\ m_2 = \dfrac{-1-7}{-4} = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto,

Si $m \neq \frac{-3}{2}$ *y* $m \neq 2$, $|A| \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 3$

Si $m = \frac{-3}{2}$ *o* $m = 2$, $|A| = 0$ *(antes hemos obtenido que ran (A) ≥ 2, luego ran(A) = 2*

Solución:

Si $m \neq \frac{-3}{2}$ ***y*** $m \neq 2$, ***ran(A) = 3.***

Si $m = \frac{-3}{2}$ ***o*** $m = 2$ ***ran(A) = 2.***

2.2.2 Para m = 0, calcular la matriz inversa de $\frac{1}{6}A$.

Como $m = 0$ $(m \neq \frac{-3}{2}$ *y* $m \neq 0)$ $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ *por lo tanto existe la matriz inversa de A.*

La matriz inversa de $\frac{1}{6}A$ *será una matriz B tal que* $\frac{1}{6}A\ B = I$; $A\ B = 6\ I$; *multiplicando por la izquierda por* A^{-1}, $A^{-1}\ A\ B = A^{-1}\ 6\ I$; $I\ B = 6\ A^{-1}$; $B = 6\ A^{-1}$.

Para $m = 0$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *y* $|A| = \left(-2m^2 + m + 6\right)\Big|_{m=0} = 6$

Cálculo de A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textit{Finalmente } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $B = 6\,\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $\left(\frac{1}{6}A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$