

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.1 (1.5 puntos) Estudiar en función de a si los planos anteriores coinciden, son paralelos no coincidentes o se cortan.

3.1.2 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, el ángulo entre los planos π_1 y π_2 .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, la distancia del punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 .

Solución:

3.1.1 Estudiar en función de a si los planos anteriores coinciden, son paralelos no coincidentes o se cortan.

π_1 coincidente con π_2 .

Debe cumplirse que $\frac{2}{a-1} = \frac{-a^2}{-a} = \frac{-a}{-1} = \frac{a-1}{a}$; $\frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} = \frac{a}{1} = \frac{a-1}{a}$ esto da lugar a tres ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} \\ \frac{2}{a-1} = \frac{a}{1} \\ \frac{2}{a-1} = \frac{a-1}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a = a^3 - a^2 \\ 2 = a^2 - a \\ 2a = (a-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^3 - a^2 - 2a = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0 \\ 2a = a^2 - 2a + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(a^2 - a - 2) = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0 \\ a^2 - 4a + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvamos cada una de las ecuaciones,

$$a(a^2 - a - 2) = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0; \quad a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \end{cases} \begin{cases} a_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a_3 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$a^2 - a - 2 = 0$; ya resuelta: $a_2 = 2$ y $a_3 = -1$

$$a^2 - 4a + 1 = 0; \quad a = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \begin{cases} a_4 = 2 + \sqrt{3} \\ a_5 = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

No existe valor de a para el que se cumplan las tres ecuaciones simultáneamente. Luego **no existe valor de a para el que los dos planos sean coincidentes.**

π_1 y π_2 paralelos no coincidentes.

Debe cumplirse que $\frac{2}{a-1} = \frac{-a^2}{-a} = \frac{-a}{-1} \neq \frac{a-1}{a}$; $\frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} = \frac{a}{1} \neq \frac{a-1}{a}$ esto da lugar a dos ecuaciones y una desigualdad:

$$\begin{cases} \frac{2}{a-1} = \frac{a^2}{a} & \text{Las dos ecuaciones las hemos resuelto antes.} \\ \frac{2}{a-1} = \frac{a}{1} & \text{1ª ecuación: } a = 0, -1 \text{ y } 2. \text{ 2ª ecuación: } a = -1 \text{ y } 2. \\ \frac{2}{a-1} \neq \frac{a-1}{a} & \text{Las dos ecuaciones se cumplen para } a = -1 \text{ y } 2. \text{ Veamos si para estos valores de } a \\ & \text{se cumple la desigualdad.} \\ & \text{Para } a = -1, \quad \frac{2}{-1-1} \neq \frac{-1-1}{-1}; \quad \frac{2}{-2} \neq \frac{-2}{-1}; \quad -1 \neq 2 \quad \text{Sí} \\ & \text{Para } a = 2, \quad \frac{2}{2-1} \neq \frac{2-1}{2}; \quad \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}; \quad 1 \neq \frac{1}{2} \quad \text{Sí} \end{cases}$$

Para $a = -1$ y 2 π_1 y π_2 son planos paralelos no coincidentes.

π_1 y π_2 se cortan.

La posición relativa de dos planos puede ser coincidentes, paralelos no coincidentes o que se corten. Como π_1 y π_2 no son coincidentes y son paralelos no coincidentes para $a = -1$ y 2 entonces **se cortan para $a \neq -1$ y 2 .**

Solución: para $a = -1$ y 2 π_1 y π_2 son planos paralelos no coincidentes y para $a \neq -1$ y 2 se cortan.

3.1.2 Si $a = 0$, ¿ángulo entre π_1 y π_2 ?

Para $a = 0$, $\pi_1: 2x = -1$ y $\pi_2: -x - z = 0$.

El ángulo entre los dos planos es igual al ángulo entre sus vectores normales.

$$\vec{n}_{\pi_1} = (2, 0, 0) \quad \text{y} \quad \vec{n}_{\pi_2} = (-1, -1, 0)$$

$$\cos \left(\widehat{\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}} \right) = \frac{|(2, 0, 0) \cdot (-1, -1, 0)|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{|-2|}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \left(\widehat{\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}} \right) = 45^\circ$$

Luego, el ángulo entre π_1 y π_2 es de 45° .

3.1.3 Si $a = 0$ y $P = (1, 0, -1)$, ¿ $d(P, \pi_1)$?

Para $a = 0$, $\pi_1: 2x = -1$, $\pi_1: 2x + 1 = 0$.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{3}{2}$$

Luego, la distancia del punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 es $3/2$.