4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.1 **(1.25 puntos)** Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de de la función $y = f(x)$.

4.1.2 **(1.5 puntos)** El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

4.1.1 Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de de la función $y = f(x)$.

La función $y = f(x)$ es un polinomio por lo que Dom y = $\Re$.

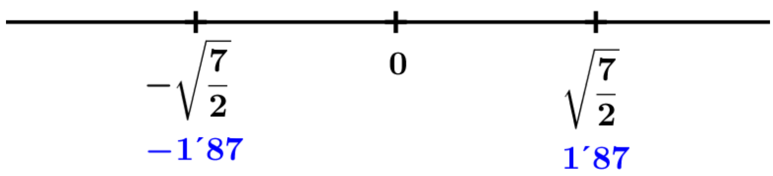
$y = x^4 - 7x^2 + 16$

$y' = 4x^3 - 14x; \quad y'' = 12x^2 - 14$

Monotonía.

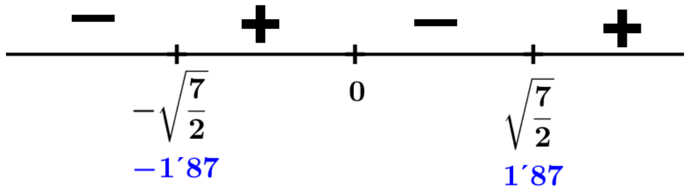
$$y' = 0; \quad 4x^3 - 14x = 0; \quad x(4x^2 - 14) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 14 = 0; \quad 4x^2 = 14; \quad x^2 = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}; \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}} \cong \pm 1'87 \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de y' en los siguientes intervalos:



x	y'
-2	$4(-2)^3 - 14(-2) = -4$
-1	$4(-1)^3 - 14(-1) = 10$
1	$4 \cdot 1^3 - 14 \cdot 1 = -10$
2	$4 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2 = 4$

Luego:



Por tanto, $y = f(x)$ es

decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ *y*

creciente en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía se deduce que la función tiene un máximo relativo en $x = 0$ y mínimos relativos en $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$. Comprobémoslo a partir de y''.

x	$y'' = 12x^2 - 14$	$y = x^4 - 7x^2 + 16$	
$-\sqrt{\frac{7}{2}}$	$12\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 - 14 = 28 > 0$ *mínimo*	$\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4 - 7\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 16 = \frac{15}{4}$;	$\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$
0	$12 \cdot 0^2 - 14 = -14 < 0$ *máximo*	$0^4 - 7 \cdot 0^2 + 16 = 16$;	$(0, 16)$
$\sqrt{\frac{7}{2}}$	$12\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 - 14 = 28 > 0$ *mínimo*	$\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4 - 7\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 16 = \frac{15}{4}$;	$\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$

Solución:* $y = f(x)$ *es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ ***y creciente en*** $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right)$.

Tiene mínimo relativo en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$ *y* $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$ ***y máximo relativo en (0 , 16).***

4.1.2 El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$.

$f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$

Los puntos de intersección de las dos curvas lo obtenemos a partir de la ecuación:

$x^4 - 7x^2 + 16 = x^2$; $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$; *ecuación bicuadrada, hacemos el cambio* $z = x^2$ *y* $z^2 = x^4$.

$$z^2 - 8z + 16 = 0; \quad z = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$$

Deshaciendo el cambio: $x^2 = 4$; $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Como las dos curvas sólo tienen dos puntos de corte entre ellas, el área de la superficie encerrada entre ellas la obtenemos como sigue:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} \left[\left(x^4 - 7x^2 + 16 \right) - \left(x^2 \right) \right] dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 7x^2 + 16 \right) dx \right|$$

Calculemos $\int_{-2}^{2} \left(x^4 - 7x^2 + 16 \right) dx$

$$\int_{-2}^{2} \left(x^4 - 7x^2 + 16 \right) dx = \left[\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^{2} = \left(\frac{2^5}{5} - 8\frac{2^3}{3} + 16 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-2)^5}{5} - 8\frac{(-2)^3}{3} + 16 \cdot (-2) \right) =$$

$$= \frac{256}{15} - \frac{-256}{15} = \frac{512}{15}$$

Luego, $A = \left| \frac{512}{15} \right| = \frac{512}{15} \cong 34'1313$

El área pedida mide $\frac{512}{15}$ ***u.a.***