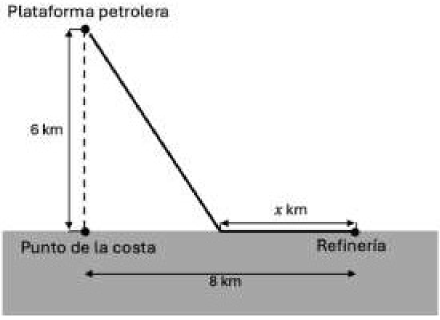
4.2 Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto P. Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.



4.2.1 **(0.5 puntos)** Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x, entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.

4.2.2 **(1.5 puntos)** Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

4.2.3 **(0.5 puntos)** Calcular dicho coste.

Solución:

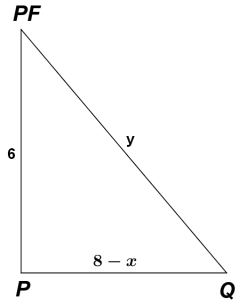
4.2.1 Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x, entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.

Del gráfico se deduce que la distancia entre el punto de la costa y el primer punto donde el oleoducto toca la costa es $8-x$.

Siendo y *la distancia entre la plataforma petrolífera y el primer punto donde el oleoducto toca la costa.*

Coste = 1000000 y + 600000 x, como debemos expresar el coste en función de x busquemos la relación entre x e y.

En el triángulo rectángulo



$$y^2 = 6^2 + (8-x)^2$$
$$y^2 = 36 + (8-x)^2$$
$$y = \sqrt{36+(8-x)^2}$$

Por tanto, $C(x) = 1000000\sqrt{36+(8-x)^2} + 600000\,x$, *por su definición* $x \in [0\,,\,8]$

Solución: $C(x) = 1000000\sqrt{36+(8-x)^2} + 600000\,x$, ***$x \in [0\,,\,8]$; x en km y C(x) en euros.***

4.2.2 ¿x? / C(x) sea mínimo.

$$C'(x) = 1000000\,\frac{2\,(8-x)\,(-1)}{2\sqrt{36+(8-x)^2}} + 600000 = \frac{-1000000\,(8-x)}{\sqrt{36+(8-x)^2}} + 600000$$

$$C'(x) = 0; \quad \frac{-1000000\,(8-x)}{\sqrt{36+(8-x)^2}} + 600000 = 0; \quad -1000000\,(8-x) + 600000\,\sqrt{36+(8-x)^2} = 0$$

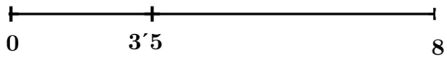
$$600000\,\sqrt{36+(8-x)^2} = 1000000\,(8-x); \quad 3\,\sqrt{36+(8-x)^2} = 5\,(8-x);$$

$$\left[3\,\sqrt{36+(8-x)^2}\,\right]^2 = [5\,(8-x)]^2; \quad 9\left(36+(8-x)^2\right) = 25\,(8-x)^2; \quad 324 + 9(8-x)^2 = 25\,(8-x)^2;$$

$$324 = 25\,(8-x)^2 - 9\,(8-x)^2; \quad 324 = 16\,(8-x)^2; \quad (8-x)^2 = \frac{324}{16}; \quad (8-x)^2 = \frac{81}{4}; \quad 8-x = \pm\sqrt{\frac{81}{4}};$$

$$8-x = \pm\frac{9}{2}\left\langle\begin{array}{l} 8-x = \frac{9}{2}; \quad x = 8-\frac{9}{2} = \frac{7}{2} = 3'5 \in [0,8] \\ 8.x = -\frac{9}{2}; \quad x = 8+\frac{9}{2} = \frac{25}{2} = 12'5 \notin [0,8] \end{array}\right.$$

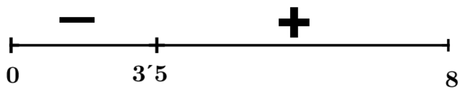
Debemos estudiar el signo de C´(x) en los siguientes intervalos:



$$x = 3, \quad C'(3) = \frac{-1000000(8-3)}{\sqrt{36+(8-3)^2}} + 600000 = -40184'399... < 0$$

$$x = 4, \quad C'(4) = \frac{-1000000(8-4)}{\sqrt{36+(8-4)^2}} + 600000 = 45299'803... > 0$$

$\rightarrow$



Por lo tanto, en x = 3´5 hay un mínimo relativo que es el absoluto ya que C(x) es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.

El coste de construcción del oleoducto será mínimo para x = 3´5 km.

4.2.3 Calcular dicho coste.

Para x = 3´5, $C(3'5) = 1000000\,\sqrt{36+(8-3'5)^2} + 600000 \cdot 3'5 = 9600000$

El coste de construcción mínimo es de 9 600 000 €.