2.1 Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

2.1.1 **(0.75 puntos)** La matriz X, si existe, tal que 2 A X = B X + I, siendo I la matriz identidad 2 x 2.

2.1.2 **(0.75 puntos)** Si existen, los valores del parámetro real α tales que $4A^2 + \alpha A - I = \mathbf{0}$, siendo $\mathbf{0}$ la matriz nula 2 x 2.

2.1.3 **(1 punto)** A^{12}.

Solución:

2.1.1 ¿Matriz X? / 2 A X = B X + I.

A partir de la expresión anterior vamos a intentar despejar la matriz X.

$2AX = BX + I;\ \ 2AX - BX = I;\ \ (2A - B)X = I \ \rightarrow\ X = (2A - B)^{-1}$

Calculemos $2A-B = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$|2A-B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0 \ \rightarrow\ \exists\,(2A-B)^{-1}$$

Calculemos $(2A-B)^{-1}$,

$$2A-B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $(2A-B)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$

2.1.2 ¿α? / $4A^2 + \alpha A - I = \mathbf{0}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$4A^2 + \alpha A - I = 4\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para que $\alpha\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \alpha=0.$

Solución: $\boldsymbol{\alpha = 0.}$

2.1.3) A^{12}

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad y\quad A^2=\begin{pmatrix}1/4 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\,A^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/4 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/8 & 1/4\\ 0 & -1/8\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^2\ A^2=\begin{pmatrix}1/4 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/4 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/16 & 0\\ 0 & 1/16\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4\ A\ =\begin{pmatrix}1/16 & 0\\ 0 & 1/16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/32 & 1/16\\ 0 & -1/32\end{pmatrix}$$

$$A^6=A^2\ A^4=\begin{pmatrix}1/4 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/16 & 0\\ 0 & 1/16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/64 & 0\\ 0 & 1/64\end{pmatrix}$$

Para n par:

$$A^2=\begin{pmatrix}1/4 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1/2)^2 & 0\\ 0 & (1/2)^2\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1/16 & 0\\ 0 & 1/16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1/2)^4 & 0\\ 0 & (1/2)^4\end{pmatrix}$$

$$A^6=\begin{pmatrix}1/64 & 0\\ 0 & 1/64\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1/2)^6 & 0\\ 0 & (1/2)^6\end{pmatrix}$$

Luego $A^{12}=\begin{pmatrix}(1/2)^{12} & 0\\ 0 & (1/2)^{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4096 & 0\\ 0 & 1/4096\end{pmatrix}$

Solución: $A^{12}=\begin{pmatrix}1/4096 & 0\\ 0 & 1/4096\end{pmatrix}.$