2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1+a)\,x + 2y + z = a \\ a\,x - y + z = 1 - a \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 **(1.25 puntos)** Discutir el sistema en función del parámetro a.

2.2.2 **(1.25 puntos)** Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Solución:

2.2.1

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1-a \\ 1+a & 2 & 1 & a \\ a & -1 & 1 & 1-a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3. A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1+a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2(1+a) + a - 4a + 3 - (1+a) = 6 - 2 - 2a + a - 4a + 3 - 1 - a = 6 - 6a$$

$6 - 6a = 0; \quad 6 = 6a; \quad a = \frac{6}{6} = 1$

Si $a \neq 1$

$|A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3* $\rightarrow$ *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.*

Si $a = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de A. Sabemos que $|A| = 0$ *y que ran(A)* ≥ 2*, por lo tanto ran(A) = 2.*

En A´, a partir del menor no nulo de orden 2 anterior formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 3ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 $\neq$ *3 = ran(A´), luego el sistema es incompatible.*

Solución, si a ≠ 1, el sistema es compatible determinado;
si a = 1, el sistema es incompatible.

2.2.2 El sistema es compatible (en concreto, compatible y determinado) para $a \neq 1$.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} 3x+y+2z=1-a \\ (1+a)\,x+2y+z=a \\ a\,x-y+z=1-a \end{cases}$

$|A| = 6-6a, \qquad \{a \neq -1 \quad \to \quad 6-6a \neq 0\}$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1-a & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6-6a} = \frac{2(1-a)-2a+(1-a)-4(1-a)+(1-a)-a}{6-6a} = \frac{-3a}{6-6a} = \frac{a}{2a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-a & 2 \\ 1+a & a & 1 \\ a & 1-a & 1 \end{vmatrix}}{6-6a} = \frac{3a+2(1+a)(1-a)+a(1-a)-2a^2-3(1-a)-(1+a)(1-a)}{6-6a} =$$

$$= \frac{3a+(1+a)(1-a)+a(1-a)-2a^2-3(1-a)}{6-6a} = \frac{3a+1-a^2+a-a^2-2a^2-3+3a}{6-6a} = \frac{-4a^2+7a-2}{6-6a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1-a \\ 1+a & 2 & a \\ a & -1 & 1-a \end{vmatrix}}{6-6a} == \frac{6(1-a)-(1+a)(1-a)+a^2-2a(1-a)+3a-(1+a)(1-a)}{6-6a} =$$

$$= \frac{6-6a-1+a^2+a^2+-2a+2a^2+3a-1+a^2}{6-6a} = \frac{5a^2-5a+4}{6-6a}$$

Si $a \neq 1$, la solución es: $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2a-2} \\ y = \dfrac{-4a^2+7a-2}{6-6a} \\ z = \dfrac{5a^2-5a+4}{6-6a} \end{cases}$