4.1 Sea la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x}{9-x^2}.$$

4.1.1 **(0.75 puntos)** Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f.*

4.1.2 **(0.25 puntos)** Dibujar la curva *y = f(x).*

4.1.3 **(0.75 puntos)** Hallar todas las primitivas de *f.*

4.1.4 **(0.75 puntos)** Calcular el área comprendida entre las curvas *y = f(x), x = – 1 , x = 1* y el eje de abcisas.

Solución:
4.1.1

Dom f(x),

$$9-x^2=0;\quad x^2=9;\quad x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \qquad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{-3,3\}$$

Asíntotas:

verticales,

$$\underset{x\to -3}{Lím}\frac{x}{9-x^2}=\frac{-3}{9-(-3)^2}=\frac{-3}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=-3\ \ es\ \ asíntota\ \ vertical$$

$$\underset{x\to 3}{Lím}\frac{x}{9-x^2}=\frac{3}{9-3^2}=\frac{3}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=3\ \ es\ \ asíntota\ \ vertical$$

horizontal,

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x\to -\infty}{Lím}\dfrac{x}{9-x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to -\infty}{Lím}\dfrac{x}{-x^2}=\underset{x\to -\infty}{Lím}\dfrac{-1}{x}=\dfrac{-1}{\infty}=0\\ \underset{x\to +\infty}{Lím}\dfrac{x}{9-x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to +\infty}{Lím}\dfrac{x}{-x^2}=\underset{x\to +\infty}{Lím}\dfrac{-1}{x}=\dfrac{-1}{\infty}=0\end{array}\right\}\rightarrow\quad y=0\ es\ la\ asíntota\ horizontal.$$

oblicua, como f(x) es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, *Dom* $f(x)=\Re-\{-3,3\}$ ***y sus asíntotas son x = – 3, x = 3 e y = 0.***

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

Debemos estudiar el signo de f´(x) en su dominio.

$$f´(x)=\frac{1\left(9-x^2\right)-x\cdot(-2x)}{\left(9-x^2\right)^2}=\frac{9-x^2+2x^2}{\left(9-x^2\right)^2}=\frac{x^2+9}{\left(9-x^2\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador.

$$x^2+9=0;\quad x^2=-9;\quad x=\pm\sqrt{-9}\ \ no\ tiene\ soluciones\ reales.$$

$$\left(9-x^2\right)^2=0;\quad 9-x^2=0;\quad \{resuelta\ antes\}\quad x=\pm 3$$

En f´(x) el numerador es positivo y el denominador, como está elevado al cuadrado, también es positivo. Por tanto, f(x) es creciente en su dominio.

f(x) es creciente en $\Re-\{-3,3\}$**.**

4.1.2 Dibujar la curva $y = f(x)$.

De $f(x)$ conocemos: Dom $f(x) = \Re - \{-3, 3\}$, asíntotas verticales $x = -3$, $x = 3$, asíntota horizontal $y = 0$ y creciente en su dominio.

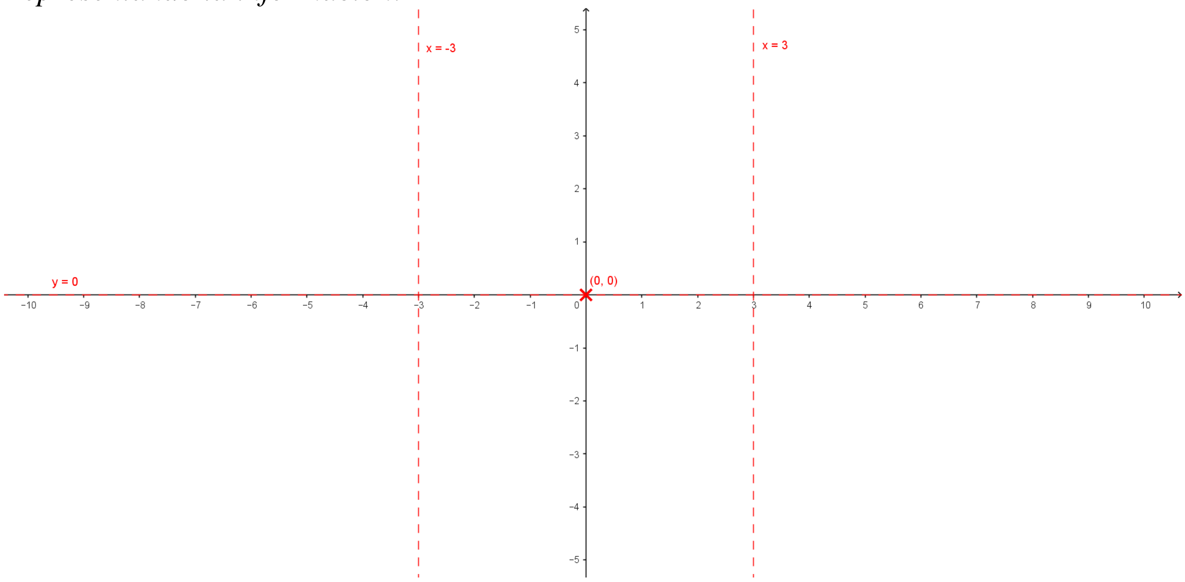
Para representar la función debemos calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

$$x = 0, \quad f(0) = \frac{0}{9 - 0^2} = 0 \quad \rightarrow \quad (0, 0)$$

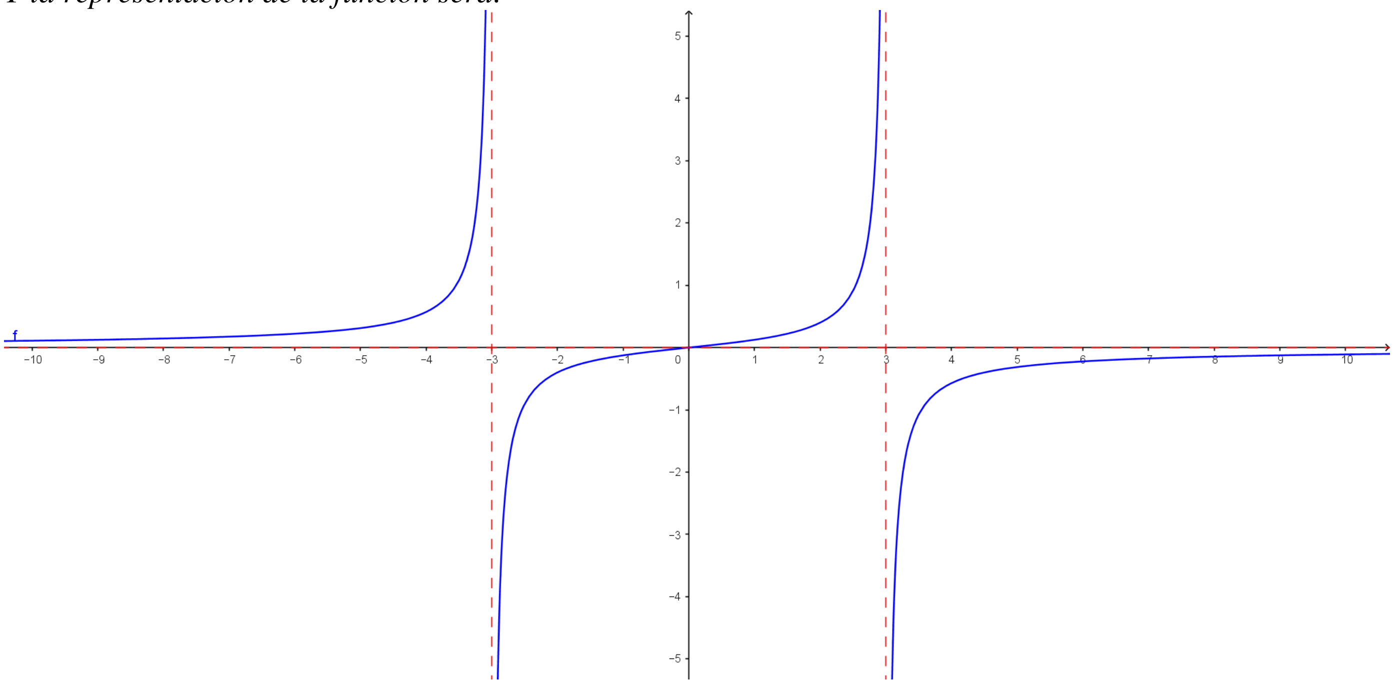
$$f(x) = 0, \quad \frac{x}{9 - x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad (0, 0)$$

punto de corte (0 , 0)

Representando la información:



Y la representación de la función será:



4.1.3) Hallar todas las primitivas de f.

Debemos calcular la siguiente integral racional:

$$\int \frac{x}{9 - x^2} \, dx$$

Descompongamos el integrando,

$$\frac{x}{9-x^2}=\frac{x}{(3-x)\,(3+x)}=\frac{A}{3-x}+\frac{B}{3+x}=\frac{A\,(3+x)+B\,(3-x)}{(3-x)\,(3+x)} \quad\rightarrow\quad x=A\,(3+x)+B\,(3-x)$$

$$x=3,\quad 3=A\,(3+3)+B\,(3-3);\quad 3=6A;\quad A=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$x=-3,\quad -3=A\,(3-3)+B\,(3-(-3));\quad -3=6B;\quad B=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$$

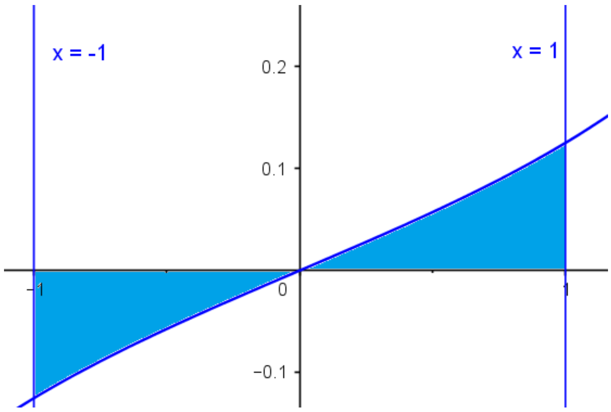
$$\int\frac{x}{9-x^2}dx=\int\frac{1/2}{3-x}dx+\int\frac{-1/2}{3+x}dx=\frac{1}{2}(-1)\,Ln\,|3-x|-\frac{1}{2}\,Ln\,|3+x|+C=-\frac{1}{2}\,Ln\,|3-x|-\frac{1}{2}\,Ln\,|3+x|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(Ln\,|3-x|+Ln\,|3+x|\right)+C=-\frac{1}{2}\left[Ln\left(|3-x|\;|3+x|\right)\right]+C=-\frac{1}{2}\,Ln\left|9-x^2\right|+C$$

Por tanto, $\displaystyle\int\frac{x}{9-x^2}dx=-\frac{1}{2}\,Ln\left|9-x^2\right|+C$

4.1.4) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abcisas.

El área a calcular es la de la zona sombreada.



Como una parte está por debajo del eje OX debemos calcular dos integrales definidas:

$$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\,Ln\left|9-x^2\right|\right]_{-1}^{0}=\left[\left(-\frac{1}{2}\,Ln\left|9-0^2\right|\right)-\left(-\frac{1}{2}\,Ln\left|9-(-1)^2\right|\right)\right]=-\frac{1}{2}\,Ln\,9+\frac{1}{2}\,Ln\,8<0$$

$$\rightarrow\quad A_1=\frac{1}{2}\,Ln\,9-\frac{1}{2}\,Ln\,8$$

$$\int_{0}^{1}f(x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\,Ln\left|9-x^2\right|\right]_{0}^{1}=\left[\left(-\frac{1}{2}\,Ln\left|9-1^2\right|\right)-\left(-\frac{1}{2}\,Ln\left|9-0^2\right|\right)\right]=-\frac{1}{2}\,Ln\,8+\frac{1}{2}\,Ln\,9>0$$

$$\rightarrow\quad A_2=-\frac{1}{2}\,Ln\,8+\frac{1}{2}\,Ln\,9$$

Finalmente, $\displaystyle A=\frac{1}{2}\,Ln\,9-\frac{1}{2}\,Ln\,8-\frac{1}{2}\,Ln\,8+\frac{1}{2}\,Ln\,9=Ln\,9-Ln\,8=Ln\,\frac{9}{8}=0'117783\ldots\cong 0'1178$

El área pedida mide $\displaystyle Ln\,\frac{9}{8}\cong 0'1178$.