4.2 Se quiere construir un bote de refresco cilíndrico de volumen 33 cm^3 que tenga un área total (incluyendo las tapas) mínima. Se pide:

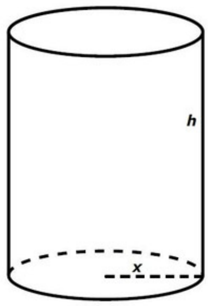
4.2.1 **(0.5 puntos)** Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.

4.2.2 **(1.5 puntos)** Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.

4.2.3 **(0.5 puntos)** Hallar dicha área.

Solución:

Cilindro de 33 cm^3 de volumen



4.2.1 Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.

El radio de la base del bote mide x cm y su altura h cm (medidos en cm porque el volumen esta en cm^3).

El área total del bote es el área lateral más el área de las dos bases:

$$A_T = 2\pi x h + 2\pi x^2$$

4.2.2 Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.

El área total del bote está expresada en función de dos variables, x y h, para poder encontrar el mínimo hay que relacionar ambas variables.

Utilizamos la condición de que el volumen del depósito debe ser 33 cm^3.

El volumen del cilindro es: $V_c = \pi x^2 h$, por lo tanto $\pi x^2 h = 33 \rightarrow h = \frac{33}{\pi x^2}$

$$A_T = 2\pi x \frac{33}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = \frac{66}{x} + 2\pi x^2 \qquad Dom\ A_T = (0, +\infty)$$

$$A_T' = \frac{-66}{x^2} + 4\pi x$$

$$\frac{-66}{x^2} + 4\pi x = 0; \quad -66 + 4\pi x^3 = 0; \quad 4\pi x^3 = 66; \quad x^3 = \frac{66}{4\pi}; \quad x = \sqrt[3]{\frac{66}{4\pi}} = 1'738246...$$

$$A_T'' = \frac{132}{x^3} + 4\pi;$$

$$A_T''\left(\sqrt[3]{\frac{66}{4\pi}}\right) = \frac{132}{\left(\sqrt[3]{\frac{66}{4\pi}}\right)^3} + 4\pi = \frac{132}{\frac{66}{4\pi}} + 4\pi = 12\pi > 0 \quad \rightarrow \quad \text{En } x = \sqrt[3]{\frac{66}{4\pi}} \text{ hay un mínimo relativo.}$$

Para comprobar que es el absoluto obtengamos el signo de A'_T su izquierda y derecha.

x	$A'_T = \dfrac{-66}{x^2} + 4\,\pi\,x$	
1	$\dfrac{-66}{1^2} + 4\,\pi\,1 = -53'43... < 0$	$\rightarrow$ A_T *es decreciente*
2	$\dfrac{-66}{2^2} + 4\,\pi\,2 = 8'63... > 0$	$\rightarrow$ A_T *es creciente*

Como a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente el mínimo relativo es el absoluto de A_T.

Para $x = \sqrt[3]{\dfrac{66}{4\,\pi}} \cong 1'7382, \quad h = \dfrac{33}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{66}{4\,\pi}}\right)^2} = 3'476492... \cong 3'4765$

Las dimensiones que minimizan el área total del bote son: radio de la base 1´7382 cm y altura 3´4765 cm.

4.2.3 Hallar dicha área.

$$A_T = \frac{66}{x} + 2\,\pi\,x^2$$

Para $x = 1'7382 \quad \rightarrow \quad A_T = \dfrac{66}{1'7382} + 2\,\pi\,1'7382^2 = 56'953948... \cong 56'9540\ cm^2$

Para $x = \sqrt[3]{\dfrac{66}{4\,\pi}} \quad \rightarrow \quad A_T = \dfrac{66}{\sqrt[3]{\dfrac{66}{4\,\pi}}} + 2\,\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{66}{4\,\pi}}\right)^2 = 56.953948... \cong 56'9540\ cm^2$

Utilizando los valores aproximados de x y h:

$A_T = 2\pi x\, h + 2\pi x^2$

$A_T = 2\pi x\, h + 2\pi x^2 = 2\ \pi\ 1'7382\ \ 3'4765 + 2\ \pi\ 1'7382^2 = 56'951995... \cong 56'9520\ cm^2$

El área total mínima del bote es de 59´9540 cm².