3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.1 **(0.5 puntos)** Encontrar el valor de m, si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 **(1.25 puntos)** Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45 grados.

3.1.3 **(0.75 puntos)** Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2.

Solución:

3.1.1 ¿m? / $\pi_1 \perp \pi_2$.

$\pi_1 \perp \pi_2$ si los vectores normales de los planos son perpendiculares $\left(\vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2}\right)$, *por lo tanto el producto escalar de los dos vectores debe ser 0.*

$$\vec{n}_{\pi_1} = (1, 2, m) \quad y \quad \vec{n}_{\pi_2} = (1, 0, 1)$$

$$\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = (1, 2, m)\cdot(1, 0, 1) = 1 + m; \quad 1 + m = 0; \quad m = -1$$

Solución: π_1 y π_2 son perpendiculares para m = – 1 .

3.1.2 ¿m? / los planos formen un ángulo de 45º

Los dos planos forman un ángulo de 45º cuando lo forman sus vectores normales.

$$\cos 45^{\circ} = \frac{\left|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}\right|}{\left|\vec{n}_{\pi_1}\right| \cdot \left|\vec{n}_{\pi_2}\right|}; \qquad \cos 45^{\circ} = \frac{\left|(1,2,m)(1,0,1)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+m^2}\,\sqrt{1^2+0^2+1^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1+m|}{\sqrt{m^2+5}\,\sqrt{2}}; \qquad \left(\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{m^2+5} = 2\,|1+m|; \quad 2\sqrt{m^2+5} = 2\,|1+m|; \quad \sqrt{m^2+5} = |1+m|$$

$$\textit{elevando al cuadrado}: \quad \left(\sqrt{m^2+5}\right)^2 = \left(|1+m|\right)^2; \quad m^2+5 = (1+m)^2; \quad m^2+5 = 1+2m+m^2;$$

$$2m-4=0; \quad 2m=4; \quad m=2$$

$$\textit{Comprobación}: \quad \sqrt{2^2+5} = |1+2|; \quad 3 = |3| \quad \textit{sí}.$$

Solución: los planos π_1 y π_2 forman un ángulo de 45º para m = 2.

3.1.3 Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2.

Siendo r la recta intersección de π_1 y π_2,

$$r: \begin{cases} x + 2y + mz = -1 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$, *resolvemos considerando x e y incógnitas principales*

$$r: \begin{cases} x + 2y = -1 - mz \\ x = 6 - z \end{cases}$$

sustituyendo el valor de x (de la 2ª ecuación) en la 1ª: $6 - z + 2y = -1 - mz$;

despejando y: $2y = -1 - mz - 6 + z$; $2y = -7 + (1 - m)z$; $y = \dfrac{-7}{2} + \dfrac{1-m}{2} z$

Solución: la ecuación de la recta intersección de los dos planos es: $r:\begin{cases} x = 6-\lambda \\ y = \dfrac{-7}{2} + \dfrac{1-m}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$