3.2 Dado el plano π: $3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 **(1.25 puntos)** Los valores del parámetro a, si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π.

3.2.2 **(1.25 puntos)** Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π.

Solución:

3.2.1 ¿a? / $r \subset \pi$ siendo r la recta que pasa por P y Q.

Para que la recta r esté contenida en el plano π debe cumplirse que los puntos P y Q $\in \pi$.

¿$P \in \pi$?, $3 \cdot 0 + 1 - (-1) = 2$; $1 + 1 = 2$ sí,

¿$Q \in \pi$?, $3 \cdot 1 + a - 1 = 2$; $2 + a = 2$; $a = 0$.

Por lo tanto, ***la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π cuando a = 0.***

3.2.2 Calcular para a = 1, el punto simétrico de Q respecto del plano π.

El proceso del cálculo es:

1º) Recta, s, que pasa por Q y es perpendicular a π.

De la recta s conocemos: $\begin{cases} \text{punto } Q(1,1,1) \\ \text{v. director}, r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi(3,1,-1) \end{cases}$

La ecuación paramétrica de s, $s: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

2º) Punto de corte entre s y π (M).

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:

$3(1 + 3\lambda) + (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2$; $3 + 9\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 2$; $11\lambda + 3 = 2$; $11\lambda = -1$;

$\rightarrow \lambda = \dfrac{-1}{11}$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta s: $\begin{cases} x = 1 + 3\dfrac{-1}{11} = \dfrac{8}{11} \\ y = 1 - \dfrac{1}{11} = \dfrac{10}{11} \\ z = 1 - \dfrac{-1}{11} = \dfrac{12}{11} \end{cases}$

Entonces $M\left(\dfrac{8}{11}, \dfrac{10}{11}, \dfrac{12}{11}\right)$.

3º) El cálculo de Q´, el simétrico de Q, podemos realizarlo de dos formas.

a) Q´ será tal que $\dfrac{Q + Q'}{2} = M$

$$Q + Q' = 2M \rightarrow Q' = 2M - Q = 2\left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right) - (1,1,1) = \left(\frac{16}{11} - 1, \frac{20}{11} - 1, \frac{24}{11} - 1\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)$$

b) ¿$A \in r$? / $d(A,\pi) = d(Q,\pi)$

$Como\ A \in r \;\; \rightarrow \;\; A(\ 1 + 3\ \lambda,\ 1 + \lambda,\ 1 - \lambda\ )$

$$d(Q,\pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 1 - 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$d(A,\pi) = \frac{1}{\sqrt{11}} \quad \rightarrow \quad \frac{|3(1+3\lambda) + 1 + \lambda - (1-\lambda) - 2|}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}; \qquad |11\lambda + 1| = 1;$$

$$|11\lambda + 1| = 1; \quad \left\langle \begin{array}{l} 11\lambda + 1 = 1; \quad 11\lambda = 0; \quad \lambda = 0; \quad A(1,1,1) = Q \\ 11\lambda + 1 = -1; \quad 11\lambda = -2; \quad \lambda = \frac{-2}{11}; \quad A\left(1 + 3\frac{-2}{11}, 1 + \frac{-2}{11}, 1 - \frac{-2}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right) Q' \end{array} \right.$$

Solución: $\boldsymbol{Q'\left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)}$**.**