Matemáticas II Junio 2003

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. a) Calcular las matrices reales de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 2X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases} \quad \text{donde } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ *(1,8 puntos).*

b) Si X *e* Y son las matrices anteriores, calcular la matriz *(2 X + Y) X – (2 X + Y) (2 Y)* *(1,5 puntos).*

Solución:

a)

Resolvemos el sistema por reducción $\begin{cases} 2X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases}$

$x\,2 \quad \begin{cases} 4X + 2Y = 2B \\ X - 2Y = C \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones

$$5X = 2B + C \quad \rightarrow \quad X = \frac{1}{5}(2B + C)$$

$x\,(-2) \quad \begin{cases} 2X + Y = B \\ -2X + 4Y = -2\,C \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones

$$5Y = B - 2\,C \quad \rightarrow \quad Y = \frac{1}{5}(B - 2\,C)$$

Calculemos las matrices X e Y.

$$X = \frac{1}{5}\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ -2/5 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular (2 X + Y) X – (2 X + Y) (2 Y), tendremos en cuenta que, según el sistema, 2 X + Y = B

Por lo tanto: (2 X + Y) X – (2 X + Y) (2 Y) = B X – B (2 Y) =

$$= B\,\frac{1}{5}(2B + C) - B\left(2\frac{1}{5}(B - 2C)\right) = \frac{2}{5}B^2 + \frac{1}{5}BC - \frac{2}{5}B^2 + \frac{4}{5}BC = BC =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$