EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Sean r la recta y π el plano de $\Re^3$, determinados del siguiente modo:
r pasa por los puntos (2,2,4) y (-1,2,1) y el plano π pasa por los puntos (1,0,1), (1,-1,0) y (3,0,0). Se pide:
a) Probar que la recta r no es paralela a π (*1 punto*).
b) Calcular el punto P de intersección de r y π y el ángulo que forman la recta r y el plano π (*1 punto*).
c) Determinar los puntos S y T de la recta r que cumplan que su distancia a π sea 4 (*1,3 puntos*).

Solución:
a) Obtengamos el vector director de la recta r

$$\vec{v}_r = (2,2,4) - (-1,2,1) = (3,0,3)$$

Obtengamos el vector ortogonal al plano π
(1,0,1) – (1,-1,0) = (0,1,1)
(1,0,1) – (3,0,0) = (-2,0,1)

$$\vec{u}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (1,-2,2)$$

Para que $r \,//\, \pi$ *debe ser* $\vec{v}_r \perp \vec{u}_\pi$
(3,0,3) . (1,-2,2) = 3 + 6 = 9 $\neq 0$, *luego la recta no es paralela al plano* π

b) Obtengamos las ecuaciones de la recta y del plano,
De la recta r conocemos uno de sus puntos (2,2,4) y su vector director obtenido en el apartado anterior, luego:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

Del plano π *conocemos su vector ortogonal, obtenido en el apartado anterior, la ecuación general del plano será: x – 2 y + 2 z + D = 0; como el plano contiene al punto, por ejemplo, (3,0,0) sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos el valor de D*
3 + D = 0, luego D = – 3

$$\pi : x - 2\,y + 2\,z - 3 = 0$$

Busquemos el corte entre la recta y el plano, sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano,

$$2 + 3\lambda - 2\,.\,2 + 2(4 + 3\lambda) - 3 = 0$$

$$2 + 3\lambda - 4 + 8 + 6\lambda - 3 = 0$$

$$3 + 9\lambda = 0 \;\rightarrow\; 9\lambda = -3 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta obtenemos el punto de corte,

$$\begin{cases} x = 2 + 3\dfrac{-1}{3} = 2 - 1 = 1 \\ y = 2 \\ z = 4 + 3\dfrac{-1}{3} = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

El punto de corte es (1,2,3)

Para calcular el ángulo que forman la recta y el plano utilizamos el vector director de la recta y el ortogonal del plano,

$$\left| \cos\left(\vec{v}_r\,,\,\vec{u}_\pi\right) \right| = \frac{|\,(3,0,3)\,.\,(1,-2,2)\,|}{\sqrt{9+9}\,\sqrt{1+4+4}} = \frac{|3+6|}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego $\left(\vec{v}_r\,,\,\vec{u}_\pi\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Por lo tanto el ángulo que forman la recta y el plano es $\dfrac{\pi}{4}$ *rds o* 45º *c) Para calcular la distancia entre un punto y un plano utilizamos la expresión,*

$$d(P,\pi)=\frac{|A\ p_1+B\ p_2+C\ p_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \textit{siendo} \quad \begin{array}{c} P(p_1,p_2,p_3) \\ \pi: Ax+By+Cz+D=0 \end{array}$$

En nuestro caso,

$$4=\frac{|2+3\lambda-2\,.\,2+2(4+3\lambda)-3|}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$4=\frac{|3+9\lambda|}{3}$$

$$12=|3+9\lambda| \quad \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 12=3+9\lambda \quad \rightarrow \quad 9=9\lambda \quad \rightarrow \quad \lambda=1 \\ -12=3+9\lambda \quad \rightarrow \quad -15=9\lambda \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{-15}{9}=\frac{-5}{3} \end{array} \right.$$

Los puntos buscados serán,

$$\textit{Para } \lambda=1, \begin{cases} x=2+3\,.\,1=2+3=5 \\ y=2 \\ z=4+3\,.\,1=4+3=7 \end{cases} \qquad S(5,2,7)$$

$$\textit{Para } \lambda=\frac{-5}{3}, \begin{cases} x=2+3\frac{-5}{3}=2-5=-3 \\ y=2 \\ z=4+3\frac{-5}{3}=4-5=-1 \end{cases} \qquad T(-3,2,-1)$$