Matemáticas II   Junio 2004

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Se consideran la recta r: (x, y, z) = (t + 1, 2 t, 3 t), el plano π: x – 2 y – z = 0 y el punto P = (1, 1, 1). Se pide

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π (*0,9 puntos*).
b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P (*1,2 puntos*).
c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2 (*1,2 puntos*).

Solución:

a) Como el plano π_1 *debe ser paralelo a* $\pi \Rightarrow \pi_1: \quad x - 2y - z + D = 0$

Como $P \in \pi_1 \Rightarrow 1 - 2 \cdot 1 - 1 + D = 0;\ -2 + D = 0;\ D = 2;$ *luego* $\pi_1 : x - 2y - z + 2 = 0$

b) De la recta r conocemos: Punto $P_r(1,0,0)$ y vector director $\vec{v}_r(1,2,3)$. *Obtenemos el vector*

$\overrightarrow{PP_r}(0,1,1)$ *que será director de* π_2

Del plano π_2 *conocemos: un punto P(1,1,1) y los vectores directores* $\vec{v}_r$ *y* $\overrightarrow{PP_r}$

La ecuación general de este plano será,

$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z-1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *desarrollando por la primera columna,* $(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$(x-1)(-1) - (y-1)1 + (z-1)1 = 0$

$-x + 1 - y + 1 + z - 1 = 0$

$-x - y + z + 1 = 0$

$x + y - z - 1 = 0$

Solución $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$

c) La recta intersección de π_1 *y* π_2 *será* $r_2 \begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Para encontrar las ecuaciones paramétricas de esta recta resolvemos el sistema anterior,

como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$ *podemos considerar como incógnitas principales x e y. El sistema a resolver es,*

$$\begin{cases} x - 2y = z - 2 \\ x + y = z + 1 \end{cases} \quad \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} z-2 & -2 \\ z+1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{z - 2 + 2z + 2}{3} = \dfrac{3z}{3} = z \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & z-2 \\ 1 & z+1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{z + 1 - z + 2}{3} = \dfrac{3}{3} = 1 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de esta recta son: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$