Matemáticas II Junio 2025

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A=\begin{bmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1-\alpha\end{bmatrix}$$

2.1.1 **(1.25 puntos)** En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores de α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 **(1.25 puntos)** En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A. Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

Solución:

2.1.1) Valores α tales que $A^2 = A$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.1+\alpha.0+0.0 & 1.\alpha+\alpha.\alpha+0.0 & 1.0+\alpha.0+0.(1-\alpha)\\ 0.1+\alpha.0+0.0 & 0.\alpha+\alpha.\alpha+0.0 & 0.0+\alpha.0+0.(1-\alpha)\\ 0.1+0.0+(1-\alpha).0 & 0.\alpha+0.\alpha+(1-\alpha).0 & 0.0+0.0+(1-\alpha)^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \alpha+\alpha^2 & 0\\ 0 & \alpha^2 & 0\\ 0 & 0 & (1-\alpha)^2\end{pmatrix}$$

Para que $A^2 = A,\ \begin{pmatrix}1 & \alpha+\alpha^2 & 0\\ 0 & \alpha^2 & 0\\ 0 & 0 & (1-\alpha)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1-\alpha\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\alpha+\alpha^2=\alpha\\ \alpha^2=\alpha\\ (1-\alpha)^2=1-\alpha\end{cases}$

Resolvamos cada una de las tres ecuaciones:

$$\alpha+\alpha^2=\alpha;\quad \alpha^2=\alpha-\alpha;\quad \alpha^2=0;\quad \alpha=0$$

$$\alpha^2=\alpha;\quad \alpha^2-\alpha=0;\quad \alpha(\alpha-1)=0\left\langle\begin{array}{l}\alpha=0\\ \alpha-1=0;\quad \alpha=1\end{array}\right.$$

$$(1-\alpha)^2=1-\alpha;\quad (1-\alpha)^2-(1-\alpha)=0;\quad (1-\alpha)\left[(1-\alpha)-1\right]=0\left\langle\begin{array}{l}1-\alpha=0;\quad \alpha=1\\ (1-\alpha)-1=0;\quad -\alpha=0;\quad \alpha=0\end{array}\right.$$

Se cumplen las tres ecuaciones cuando $\alpha = 0$.

Solución: la matriz A es idempotente cuando $\alpha = 0$.

2.1.2) Valores de α para los que existe A^{-1}.

Existirá A^{-1} cuando $/A/ \neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1-\alpha\end{vmatrix}=\alpha(1-\alpha);\qquad \alpha(1-\alpha)=0\left\langle\begin{array}{l}\alpha=0\\ \alpha-1=0;\quad \alpha=1\end{array}\right.$$

Para que exista A^{-1} debe ser $\alpha\neq 0$ y $\alpha\neq 1$.

Calculamos A^{-1} *para estos valores de* α*:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & 0 & 0 \\ \alpha(1-\alpha) & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & 0 & 0 \\ -\alpha(1-\alpha) & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & -\alpha(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Finalmente, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & -\alpha(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\alpha(1-\alpha)}\begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & -\alpha(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$