

3.2 Se considera el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto del plano π .

Solución:

3.2.1) ¿Plano σ ? / $\sigma \perp \pi$ y $P(-1, 0, 1)$ y $Q(2, 1, 2) \in \sigma$.

Para obtener la ecuación del plano σ debemos obtener un punto y dos vectores directores de este plano.

$\sigma \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ es vector director de σ .

P y $Q \in \sigma \rightarrow \begin{cases} \text{punto de } \sigma & P(-1, 0, 1) \\ \text{vector director de } \sigma & \vec{PQ}(3, 1, 1) \end{cases}$

La ecuación del plano σ ,

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x+1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1) \cdot (-3) - y \cdot (-3) + (z-1) \cdot 6 = 0$$

$$-3x - 3 + 3y + 6z - 6 = 0; \quad -3x + 3y + 6z - 9 = 0; \quad x - y - 2z + 3 = 0$$

Por lo tanto, el plano pedido es $\sigma: x - y - 2z + 3 = 0$

3.2.2) La distancia del punto $Q = (2, 1, 2)$ al plano $\pi: 3x - y + 2z - 4 = 0$.

$$d(Q, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} \cong 1.3363$$

La distancia del punto Q al plano π es $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

3.2.3) Simétrico de P respecto del plano π .

1º) Recta, r , que pasa por P y es perpendicular a π

De la recta r conocemos: $\begin{cases} \text{punto } P(-1, 0, 1) \\ \text{v. director, } r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi(3, -1, 2) \end{cases}$

Las ecuaciones paramétricas de r , $r: \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2º) Punto de corte entre r y π (M).

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:

$$3(-1 + 3\lambda) - (-\lambda) + 2(1 + 2\lambda) = 4$$

$$-3 + 9\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda = 4$$

$$14\lambda - 1 = 4 \rightarrow 14\lambda = 5 \rightarrow \lambda = \frac{5}{14}$$

$$\text{Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta } r: \begin{cases} x = -1 + 3 \frac{5}{14} = \frac{1}{14} \\ y = -\frac{5}{14} = \frac{-5}{14} \\ z = 1 + 2 \frac{5}{14} = \frac{12}{7} \end{cases}$$

$$\text{Entonces } M\left(\frac{1}{14}, \frac{-5}{14}, \frac{12}{7}\right).$$

3º) El cálculo de P' podemos realizarlo de dos formas.

$$a) P' \text{ será tal que } \frac{P + P'}{2} = M$$

$$P + P' = 2M \rightarrow P' = 2M - P = 2\left(\frac{1}{14}, \frac{-5}{14}, \frac{12}{7}\right) - (-1, 0, 1) = \left(\frac{2}{14} + 1, \frac{-10}{14}, \frac{24}{7} - 1\right) = \left(\frac{8}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{17}{7}\right)$$

$$b) ¿A \in r? / d(A, \pi) = d(P, \pi)$$

$$\text{Como } A \in r \rightarrow A(-1 + 3\lambda, -\lambda, 1 + 2\lambda)$$

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot (-1) - 0 + 2 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

$$d(A, \pi) = \frac{5}{\sqrt{14}} \rightarrow \frac{|3(-1 + 3\lambda) - (-\lambda) + 2(1 + 2\lambda) - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}; \quad |-3 + 9\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda - 4| = 5;$$

$$|14\lambda - 5| = 5; \quad \begin{cases} 14\lambda - 5 = 5; & 14\lambda = 10; & \lambda = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}; & A\left(-1 + 3\frac{5}{7}, -\frac{5}{7}, 1 + 2\frac{5}{7}\right) = \left(\frac{8}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{17}{7}\right) = P' \\ 14\lambda - 5 = -5; & 14\lambda = 0; & \lambda = 0; & A(-1, 0, 1) = P \end{cases}$$

$$\text{Solución: } P'\left(\frac{8}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{17}{7}\right).$$