2.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + a\,z = -2 \\ -x + 2y - a\,z = 3 \\ a\,x + y + z = 2 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.1.1 **(1.25 puntos)** Discutir el sistema en función del parámetro a.

2.1.2 **(1.25 puntos)** Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

Solución:

2.1.1)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.

A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - a + a^2 - 2a^2 + a - 1 = -a^2 + 1$$

$$-a^2 + 1 = 0; \quad a^2 = 1; \quad a = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Si $a \neq -1$ y 1

$|A| \neq 0 \rightarrow$ ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 $\rightarrow$ ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = -1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A,

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$

En A´, como $F_3 = -1 \times F_1 \rightarrow$ ran(A´) ≤ 2 (el menor de orden 2 no nulo anterior también es de A´) por tanto ran(A´) = 2

Por lo tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < 3(número de incógnitas), luego el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A,

$$\left.\begin{array}{l} En\ A, \quad |1| = 1 \neq 0 \\ \qquad\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0 \end{array}\right\} \to ran(A) = 2$$

$$En\ A', \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2+4 = 2 \neq 0 \quad \to \quad ran(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 ≠ 3 = ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Por tanto, ***si a ≠ – 1 y 1, el sistema es compatible determinado;***
si a = – 1, el sistema es compatible indeterminado;
si a = 1, el sistema es incompatible.

2.1.2) El sistema es compatible en dos casos. Obtengamos la solución en cada caso.
Si a ≠ – 2 y 1, S. C. D.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2+1$$ *(calculado anteriormente y como las raíces de este polinomio son 1 y – 1)*

$$= -(a-1)(a+1)$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ 3 & 2 & -a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)(a+1)} = \frac{-4+3a+2a-4a-2a+3}{-(a-1)(a+1)} = \frac{-a-1}{-(a-1)(a+1)} = \frac{-(a+1)}{-(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -1 & 3 & -a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)(a+1)} = \frac{3-2a+2a^2-3a^2+2a-2}{-(a-1)(a+1)} = \frac{-a^2+1}{-a^2+1} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-(a-1)(a+1)} = \frac{4+2-3a+4a-3-2}{-(a-1)(a+1)} = \frac{a+1}{-(a-1)(a+1)} = \frac{1}{-(a-1)} = \frac{1}{1-a}$$

Si a ≠ – 1 y 1, la solución es: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{a-1} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{1}{1-a} \end{cases} \quad a \in \Re$

Si a = – 1, S. C. I.

El sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado 2.1.1). Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y.

$$\begin{cases} x - y = -2 + z \\ -x + 2y = 3 - z \end{cases} \rightarrow \quad \text{Sumando ambas ecuaciones: } \ y = 1 \qquad 2 \cdot \begin{cases} 2x - 2y = -4 + 2z \\ -x + 2y = 3 - z \end{cases} \quad \text{sumando: } x = -1 + z \rightarrow \text{Solución } \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

Si a = – 1 la solución es: $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$