3.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas la recta r y el plano π, de ecuaciones $r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$ y $\pi: a\,x + y - z = b$

con a y b parámetros reales, obtener:

3.2.1 **(1 punto)** Los valores del parámetro a para los que r y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a.

3.2.2 **(1.5 puntos)** Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π.

Solución:

3.2.1) $¿a? / r \cap \pi = punto$

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de la recta r, $r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\,\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Sustituyendo los valores de x, y, z de la ecuación de la recta en el plano,

$a \cdot (5+\lambda) + 1 + 3\lambda - 4\,\lambda = b$ *En esta ecuación la incógita es* λ

$5a + a\lambda + 1 + 3\lambda - 4\,\lambda = b;\quad 5a + a\,\lambda + 1 - \lambda = b;\quad a\,\lambda - \lambda = b - 5a - 1;$

$(a-1)\,\lambda = b - 5a - 1;\quad \lambda = \frac{b-5a-1}{a-1}$

Para que haya punto de corte λ *debe tener solución, por tanto* $a - 1 \neq 0$ *y* $b - 5\,a - 1$ *cualquier valor, es decir,* $a \neq 1$.

Luego, ***la recta r y el plano π se cortan en un único punto cuando a ≠ 1.***

El punto de corte lo obtendremos sustituyendo el valor de λ *en la recta:*

$$P: \begin{cases} x = 5 + \frac{b-5a-1}{a-1} = \frac{5a-5+b-5a-1}{a-1} = \frac{b-6}{a-1} \\ y = 1 + 3\,\frac{b-5a-1}{a-1} = \frac{a-1+3b-15a-3}{a-1} = \frac{-14a+3b-4}{a-1} \\ z = 4\,\frac{b-5a-1}{a-1} = \frac{4b-20a-4}{a-1} \end{cases}$$

El punto de corte es: $P\left(\frac{b-6}{a-1}, \frac{-14a+3b-4}{a-1}, \frac{4b-20a-4}{a-1}\right) \quad a \neq 1.$

3.2.2) $¿a$ *y* $b? / r \subset \pi$.

Para que la recta r esté contenida en el plano π la ecuación que obtuvimos en el apartado 3.2.1), $(a-1)\,\lambda = b - 5\,a - 1$, *debe tener infinitas soluciones y para que esto ocurra debe ser:*

$a - 1 = 0$ *y* $b - 5\,a - 1 = 0$ *(para que quede una ecuación de la forma* $0 = 0$*)*

Por lo que, $a = 1$ *y*

$b - 5\,.\,1 - 1 = 0;\quad b - 6 = 0;\quad b = 6$

Por tanto, ***r está contenida en π para a = 1 y b = 6.***

¿a y b? / la recta r no corta al plano π.

Para que la recta r no corte all plano π la ecuación que obtuvimos en el apartado 3.2.1), $(a-1)\lambda = b-5a-1$, no debe tener solución y para que esto ocurra debe ser:

$a-1=0$ y $b-5a-1 \neq 0$ (para que quede una ecuación de la forma $0 = \text{núm} \neq 0$)

Por lo que, $a = 1$ y

$b-5 \cdot 1-1 \neq 0$; $b-6 \neq 0$; $b \neq 6$

Por tanto, ***r y π no se cortan para $a = 1$ y $b \neq 6$.***